D'Aristarque à Ératosthène

Pierre Causeret, Esbarres

La méthode d'Ératosthène pour mesurer la Terre est au programme de l'enseignement scientifique de 1re. Mais, pour réaliser cette mesure, Ératosthène a dû s'appuyer sur des hypothèses de départ, qu'il est intéressant de pouvoir justifier, grâce en particulier aux travaux d'Aristarque.

Dans tous les documents expliquant comment Ératosthène a mesuré la longueur d'un méridien, on lit à un moment une phrase du genre : Ératosthène s'appuie « sur le modèle d'une Terre sphérique située à distance infinie du soleil » (ressources Éduscol) ou encore « on fait l'hypothèse que les rayons du soleil sont parallèles entre eux ». Cette hypothèse est-elle raisonnable ? C'est la question qui va nous intéresser ici.

Aristarque de Samos

Aristarque de Samos est un astronome et mathématicien grec du 3e siècle avant notre ère. Il est connu pour avoir, d'après Archimède, proposé un système héliocentrique. Le seul ouvrage qui nous soit parvenu de lui s'intitule *Sur les grandeurs et les distances du Soleil et de la Lune*. L'ouvrage a été traduit et est disponible en français[1].

En 29 propositions, il explique comment calculer le rapport du diamètre du Soleil à celui de la Terre, le rapport du diamètre de la Lune à la distance Terre-Lune... Voici les hypothèses utilisées par Aristarque (nous reviendrons plus loin sur quelques-unes d'entre elles) :

Les hypothèses d'Aristarque

1. La Lune reçoit sa lumière du Soleil.
2. La Terre peut être considérée comme un point et comme le centre de l'orbite de la Lune.
3. Lorsque la Lune nous paraît dikhotome (coupée en deux portions égales), elle offre à nos regards son grand cercle, qui détermine la partie éclairée et la partie obscure de cet astre.
4. Lorsque la Lune nous paraît dikhotome, sa distance au Soleil est moindre du quart de la circonférence, de la trentième partie de ce quart.
5. La largeur de l'ombre est de deux lunes.
6. L'arc soutendu dans le ciel par la Lune est la quinzième partie d'un signe.

Et voici les propositions qu'il démontre, relatives aux diamètres et aux distances, telles qu'il les énonce :

Les propositions d'Aristarque

Proposition VIII
La distance à laquelle le Soleil se trouve de la Terre est plus grande de 18 fois, mais moindre de 20 fois que celle à laquelle la Lune se trouve de la Terre.
Proposition X
Le diamètre du Soleil est plus de 18 fois et moins de 20 fois plus grand que celui de la Lune.
Proposition XII
Le diamètre de la Lune contient moins de 2/45 parties de la distance du centre de la Lune à notre œil et il est plus grand que la trentième partie de cette distance.
Proposition XVI
Le diamètre du Soleil est au diamètre de la Terre en plus grande proportion que 19 à 3 et en moindre que 43 à 6.
Proposition XVIII
Le diamètre de la Terre est au diamètre de la Lune en plus grand rapport que celui de 108 à 43, moindre que celui de 60 à 19.

Ces résultats permettent de calculer le diamètre et la distance de la Lune et du Soleil en fonction du diamètre de la Terre D_T. Les résultats sont donnés en nombres décimaux arrondis avec deux chiffres significatifs (on a ajouté entre crochets la valeur correcte actuelle) :

- avec la proposition XVI, le diamètre du Soleil est compris entre 6,3 et 7,2 D_T [pour 110] ;
- avec la proposition XVIII, le diamètre de la Lune est compris entre 0,32 et 0,4 D_T [pour 0,27] ;
- avec la proposition XII, la distance de la Lune est comprise entre 9 et 9,5 D_T [pour 30] ;
- avec la proposition VIII, la distance du Soleil est comprise entre 160 et 190 D_T [pour 12 000].

Pour la Lune, on obtient un ordre de grandeur correct alors qu'ils sont très sous-estimés pour le Soleil.

1 Le texte complet dans la traduction de Fortia d'Urban est disponible sur Gallica.

À l'origine de ces valeurs peu précises, il y a trois mesures erronées :

- la mesure de l'angle Soleil Terre Lune au premier quartier (hypothèse 4, voir l'activité qui suit) ;
- le diamètre apparent de la Lune estimé à 2° au lieu de 0,5° (c'est l'hypothèse 6, un signe, c'est un douzième de 360° donc 30°, la quinzième partie d'un signe, c'est 2°);
- la mesure de l'ombre de la Terre pendant les éclipses de Lune (hypothèse 5) estimée à deux fois le diamètre de la Lune au lieu de 2,6.

Mais tous les raisonnements sont corrects.

Les calculs d'Aristarque sont, pour la plupart, assez complexes. Il n'utilise pas la trigonométrie, encore inconnue à l'époque. Il se sert beaucoup de cette propriété :

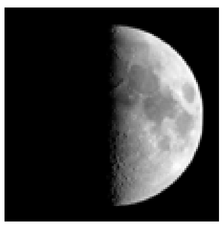
$EG / EH > \widehat{EBG} / \widehat{EBH}$

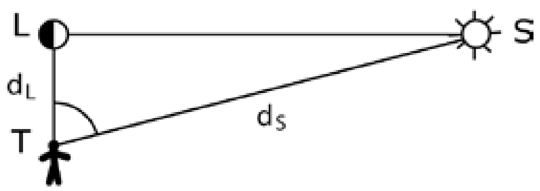
Mais la proposition VIII est accessible et mérite qu'on s'y arrête. Les calculs peuvent être adaptés pour les lycéens.

Une activité pour les élèves

Comparaison des distances de la Lune et du Soleil

Lorsque la Lune est au premier quartier (photo de droite), on voit exactement la moitié de la Lune éclairée.
Cela signifie que l'angle $\widehat{TLS}$ (figure ci-dessous) est droit.





La Lune en premier quartier est visible l'après-midi et en première partie de nuit. L'après-midi, on peut donc mesurer l'angle que fait la direction de la Lune avec la direction du Soleil, l'angle $\widehat{LTS}$ de la figure.

a. Aristarque avait trouvé 87° pour l'angle $\widehat{LTS}$. Pour trouver combien de fois le Soleil est plus éloigné que la Lune, calculer le rapport TS/TL.

b. En réalité, cet angle est beaucoup plus proche de l'angle droit, il est compris entre 89,8° et 89,9°. Que peut-on dire de la distance du Soleil d_S, comparée à la distance de la Lune d_L ?

Le calcul d'Aristarque

L'angle $\widehat{LTS}$ est difficile à mesurer. Aristarque avait trouvé 87°. Ce qu'il exprimait ainsi :
« Lorsque la Lune nous paraît dikhotome, sa distance au Soleil est moindre du quart de la circonférence, de la trentième partie de ce quart ».
Dikhotome signifie coupée en deux donc au premier ou au dernier quartier.
La distance au Soleil est ici l'angle entre la direction de la Lune et la direction du Soleil.
Le quart de la circonférence, c'est 360°/4 soit 90°.
La trentième partie de ce quart, c'est 90°/30 = 3°.
L'angle donné est donc égal à 90° – 3° soit 87°.
Avec cette valeur et sans trigonométrie, Aristarque arrivait à cette conclusion :
« La distance à laquelle le Soleil se trouve de la Terre est plus grande de 18 fois, mais moindre de 20 fois que celle à laquelle la Lune se trouve de la Terre. »
Dire que le Soleil est 18 à 20 fois plus loin que la Lune, c'est beaucoup trop peu, mais Aristarque montrait néanmoins que le Soleil était beaucoup plus éloigné que la Lune.

Solutions

a. cos $\widehat{LTS}$ = TL/TS donc TS/TL = 1/cos $\widehat{LTS}$. Pour 87°, on obtient 19 environ. Le Soleil est donc 19 fois plus loin que la Lune.

b. Avec 89,8°, on obtient 286 pour TS/TL. Pour 89,9°, on trouve 573. On peut donc conclure que le Soleil est 286 à 573 fois plus éloigné de nous que la Lune.

Avec d'autres méthodes, on montre que le Soleil est environ 400 fois plus éloigné de nous que la Lune. Ce qui donne 89,853° pour l'angle $\widehat{LTS}$ à l'instant du premier quartier.

Discussion sur la méthode

En une heure, la Lune se déplace de 0,5° par rapport à la direction du Soleil. Pour obtenir une précision du dixième de degré, il faudrait connaître l'heure d'un premier ou d'un dernier quartier à 10 minutes près, ce qui n'est pas possible uniquement par l'observation de la forme de la Lune. La méthode d'Aristarque est très astucieuse, mais on ne peut pas en attendre une grande précision. Par contre, elle montre que le Soleil est beaucoup plus loin que la Lune. Ce résultat est un premier pas pour justifier le parallélisme des rayons du Soleil dans l'expérience d'Ératosthène.

La distance du Soleil pour Aristarque

La suite des calculs d'Aristarque pour arriver à la distance du Soleil est souvent ardue. Il utilise deux données supplémentaires, le diamètre apparent de la Lune (il donne 2° au lieu de 0,5°) et le diamètre de l'ombre de la Terre à la distance de la Lune, qui provient de l'observation des éclipses de Lune (il donne 2 diamètres lunaires pour l'ombre de la Terre au lieu de 2,6). Les lecteurs qui le désirent trouveront plus de détails dans les compléments en ligne sur le site du CLEA.

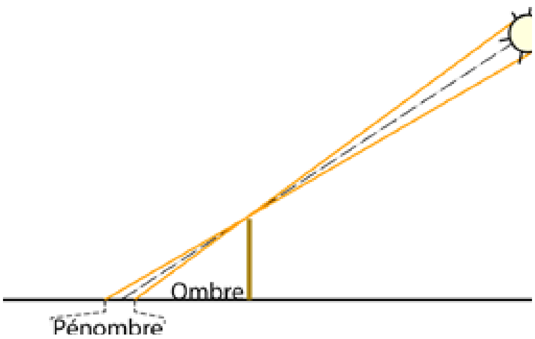
Il ne donne pas directement la distance du Soleil d_S en fonction du diamètre de la Terre D_T mais ses résultats conduisent à : $160\ D_T < d_S < 190\ D_T$.

Il est possible qu'Ératosthène ait eu connaissance de ce résultat. Aristarque est décédé aux alentours de 230 avant notre ère et c'est à peu près à cette période que l'on pense qu'Ératosthène a fait ses calculs. Quoi qu'il en soit, on peut justifier le grand éloignement du Soleil avec des méthodes accessibles il y a plus de 2 000 ans.

Les rayons du Soleil sont-ils parallèles ?

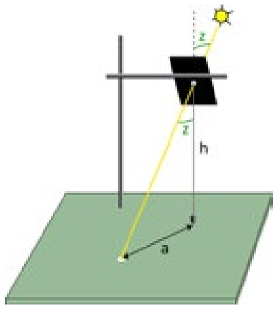
Deux problèmes se posent pour répondre à cette question : le Soleil n'est pas une source ponctuelle et il n'est pas situé à l'infini.

Le diamètre apparent du Soleil est d'environ 0,5°. Pour cette raison, l'ombre d'un objet ne peut pas être nette, il y a une zone de pénombre. Dans le calcul de l'angle entre les rayons du Soleil et un bâton vertical, on peut faire une erreur de 0,25° si on prend le bord de la pénombre plutôt que le « centre ».

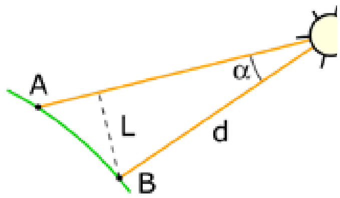


Si, comme Ératosthène, on mesure un angle de 7,2°, l'imprécision de 0,5° (pour deux mesures, dans chacune des villes) amène une erreur possible de 7 %, ce qui permet néanmoins d'avoir un bon ordre de grandeur.

Si par contre, vous refaites l'expérience avec deux villes plus proches, il faut réduire au maximum l'imprécision sur la mesure de l'angle. Pour cela, il ne faut pas utiliser l'ombre d'un bâton, mais une installation donnant une tache lumineuse dont on peut déterminer assez facilement le centre comme celle de la figure qui suit.



Deuxième problème, le Soleil n'étant pas à l'infini, quelle erreur fait-on en considérant les rayons du Soleil parallèles ?



L'erreur de parallélisme, l'angle α de la figure, peut être estimé pour les mesures de l'époque : en considérant comme Aristarque le Soleil à environ 175 fois le diamètre de la Terre, en prenant comme Ératosthène pour la distance AB, 1/50 de la circonférence de la Terre (soit environ 1/16 de son diamètre) et vu que L est inférieur à AB, on arrive à un angle a inférieur à 0,02° :

$$a = \operatorname{asin}(L/D) < \operatorname{asin}((1/16)/175).$$

Avec la distance connue actuellement du Soleil et même pour des villes très éloignées, c'est encore plus faible. On peut donc considérer les rayons du Soleil parallèles sans faire de grosse erreur.

Conclusion

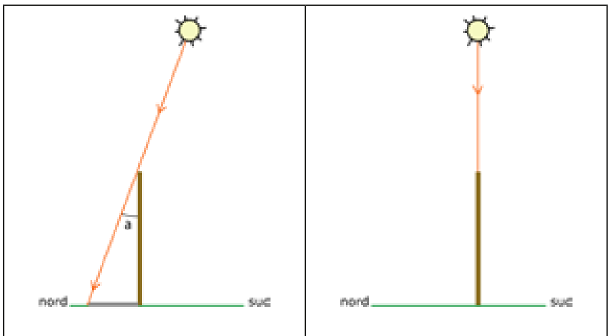
Ératosthène s'appuie dans sa méthode sur deux hypothèses principales : la Terre est sphérique et les rayons du Soleil arrivent sur Terre parallèles. Il serait dommage de ne pas justifier auprès des élèves ces deux hypothèses. La première peut l'être avec les arguments d'Aristote sur la forme de l'ombre de la Terre pendant les éclipses de Lune et sur les nouvelles étoiles qui apparaissent quand on se dirige vers le sud[2].

La deuxième hypothèse d'Ératosthène peut être en partie justifiée à partir de la proposition VIII d'Aristarque détaillée page précédente. Ce serait dommage de s'en priver. ■

2 Le hors-série n° 13 qui sortira à l'automne 2020 reviendra longuement sur ces preuves.

La méthode d'Ératosthène

Rappelons brièvement de quoi il s'agit, même si nous en avons parlé à diverses reprises dans cette revue. Ératosthène, un astronome grec du 3e siècle avant notre ère, avait appris que le Soleil était à la verticale de Syène à midi le jour du solstice d'été, alors qu'au même moment à Alexandrie, les rayons du Soleil faisait un angle de 1/50 tour avec la verticale. Ce que l'on peut illustrer par cette figure :



À Alexandrie — À Syène

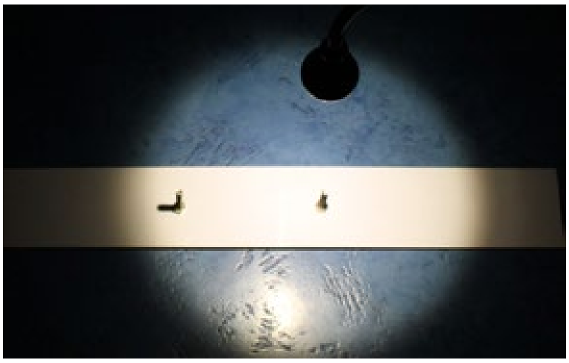
On représente souvent la verticalité des rayons lumineux à Syène par un puits éclairé jusqu'au fond (comme sur la dernière figure de la page).

Cléomède, un des rapporteurs de la méthode d'Ératosthène, ne parle pas de puits mais de scaphé, un cadran solaire hémisphérique : à Syène, écrit-il, « les gnomons des cadrans solaires concaves sont nécessairement sans ombres ». Mais on trouve le puits dans d'autres écrits comme ceux de Strabon[3].

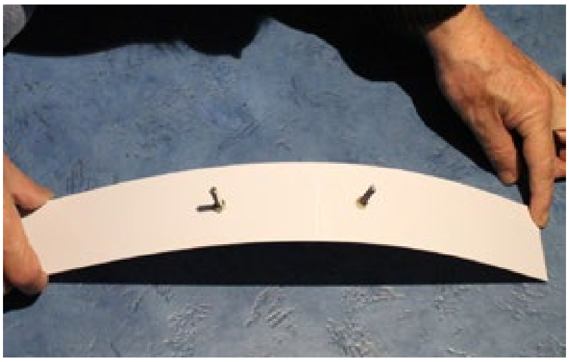
Dans le texte de Cléomède, on peut lire également qu'à Alexandrie, « l'arc du cadran est la cinquantième partie de son propre cercle ». L'angle peut être donné en tour (1/50 tour) ou en degrés (7,2°).

Cettte expérience ne montre pas que la Terre est ronde comme on le lit parfois. Un Soleil proche et une Terre plate donnent le même résultat. Pour s'en convaincre, on peut fixer deux gnomons sur une bande de carton ou de plastique et les éclairer par une lampe. Si la lampe est proche, il est possible de n'avoir aucune ombre sur un gnomon et une ombre assez longue sur l'autre. Si la lampe est éloignée, il faut courber la bande de carton pour obtenir un gnomon sans ombre et l'autre avec une ombre suffisamment longue.

3 On pourra se reporter à une étude fort intéressante de Nicolas Décamp et Cécile de Hosson sur la méthode d'Ératosthène dans le bulletin n° 937 de l'UdPPC (http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01663442)



Avec un sol plat, la source lumineuse doit être proche pour obtenir les ombres attendues.



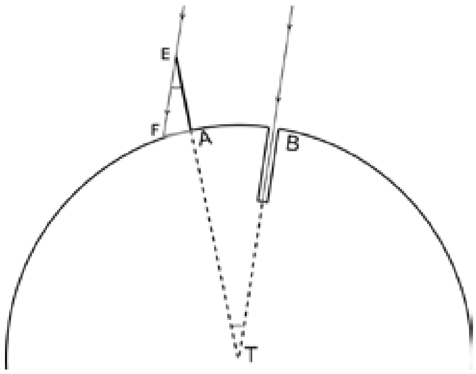
Si on éloigne la source lumineuse, il faut courber le sol pour avoir les mêmes ombres.

Une dernière précision, il est important que les deux villes soient sur le même méridien (ce n'est pas tout à fait vrai en réalité pour Syène et Alexandrie) afin qu'il y soit midi en même temps.

Pour terminer, voici comment calculer le rayon de la Terre

Les données :

- Alexandrie (A) et Syène (B) sont distants de 5 000 stades soit environ 800 de nos kilomètres ;
- l'angle $\widehat{AEF}$ mesure 1/50 tour.



Les angles $\widehat{ATB}$ et $\widehat{AEF}$ sont alternes internes donc $\widehat{ATB}$ mesure aussi 1/50 tour. L'arc $\widehat{AB}$ mesure 800 km donc la circonférence complète vaut :

$$800 \times 50 = 40\,000 \text{ km.}$$

Rayon de la Terre = 40 000/(2π) ≈ 6 400 km.