HISTOIRE

Cassini et Richer

« Recherche de la parallaxe du Soleil par le moyen de celle de Mars observé à mesme temps à Paris & en Caïenne »

Béatrice Sandré

Les livres d'histoire de l'astronomie nous enseignent que Cassini et Richer ont été les premiers à mesurer la parallaxe de Mars. Mais comment ont-ils fait ? Béatrice Sandré nous permet ici de rentrer dans le détail de leurs calculs et nous fait entrevoir la complexité de leur tâche.

Depuis les mesures de Tycho Brahe et les calculs de Kepler (voir CC n° 118 été 2007), on connaît à chaque instant les positions relatives du Soleil, de la Terre et des cinq planètes et donc les distances Terre planètes, mais dans une unité inconnue, la distance moyenne de la Terre au Soleil appelée unité astronomique (ua).

Cassini savait par exemple qu'en septembre 1672 la planète Mars serait très près de l'opposition mais aussi de son périgée (comme en août 2003) et que la distance Terre Mars serait minimale et égale à 3/8 de l'unité astronomique. Il profite de cette occasion pour déterminer la parallaxe de Mars et en déduire la valeur de l'unité astronomique.

Pour réaliser cette mesure, il faut observer les positions de Mars par rapport aux étoiles beaucoup plus lointaines, au même instant et depuis deux points très distants. Cassini reste à Paris et envoie son collègue Richer à l'île de Cayenne.

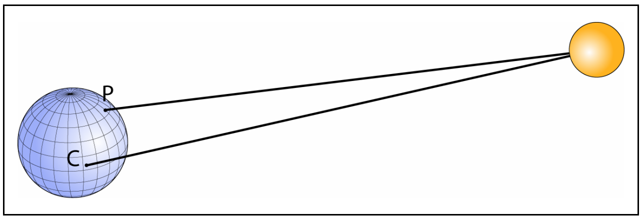

***Fig.1**. Pour déterminer la distance de Mars, on vise la planète depuis Paris et Cayenne.*

Différence des méridiens entre Paris et Cayenne

Pour déterminer la parallaxe de Mars à partir des observations faites depuis Paris et Cayenne, il est nécessaire de connaître avec un maximum de précision l'écart entre les latitudes ainsi que l'écart entre les longitudes de Paris et Cayenne.

À l'époque de Cassini, on est capable de mesurer très précisément des latitudes mais la mesure de la longitude (qui est un décalage horaire) est beaucoup plus délicate : on ne sait pas embarquer d'horloge sur un navire. Cette mesure est réalisée par plusieurs méthodes ce qui va permettre d'évaluer l'incertitude sur le résultat.

Cassini et Richer observent le commencement de l'éclipse de Lune du 7 novembre 1672 [1]

5 h 15 min 40 s à Paris

et 1 h 47 min 12 s à Cayenne

L'écart en longitude serait de 3 h 28 min 28 s (ou 52,12°).

Ils observent la conjonction de Io et Jupiter dans la nuit du 1er au 2 avril 1672

24 h 43 min 3 s à Paris

et 21 h 16 min 30 s à Cayenne

L'écart en longitude serait de 3 h 26 min 27 s (ou 51,61°).

Ils mesurent les hauteurs méridiennes du Soleil à Paris et à Cayenne le 22 septembre 1672, jour de l'équinoxe d'automne et le 20 mars 1673, jour de l'équinoxe de printemps. Ils en déduisent un écart en longitude de 3 h 42 min[2].

Cassini regrette que le retour prématuré de Richer à cause de sa maladie n'ait pas permis de mesurer ce décalage horaire par observation des immersions ou des émersions des satellites de Jupiter dans son ombre. Il précise cependant qu'il a été mesuré par plusieurs autres méthodes et que l'ensemble donne une moyenne de 3 h 39 min avec une incertitude de l'ordre de 10 min.

[1] Il y a dans le texte de Cassini une erreur de date puisque l'éclipse de Lune a eu lieu le 7 septembre 1672 et non le 7 novembre 1672.

[2] La méthode de Cassini n'est pas simple. Elle utilise la variation de déclinaison du Soleil considérée proportionnelle au temps au moment des équinoxes. Les abonnés numériques trouveront le détail des calculs sur le site.

La parallaxe de Mars

Richer et Cassini observent donc la planète Mars depuis Paris et Cayenne pendant le mois de septembre 1672. Elle passera à proximité d'une étoile du Verseau notée Ψ^1 Aquarii dans le catalogue de Bayer (figure 2).

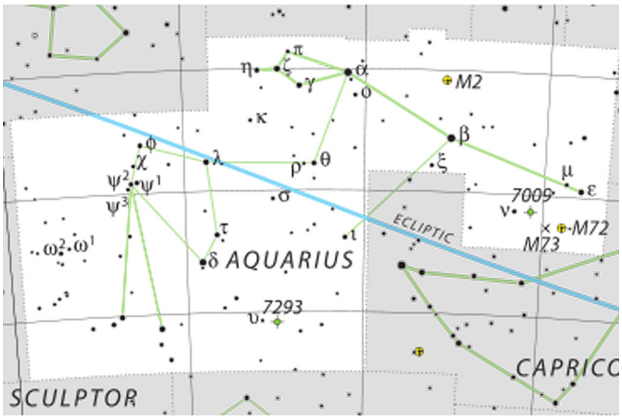

Fig.2*. Cassini et Richer ont observé Mars en septembre 1672 dans cette région du ciel, à proximité de l'étoile ψ^1 du Verseau.*

Pour préciser les positions des astres, ils mesurent leurs hauteurs méridiennes, c'est-à-dire leurs hauteurs au dessus de l'horizon lorsqu'ils passent dans le plan du méridien plein sud. La hauteur méridienne est la hauteur maximale de l'astre au cours du mouvement diurne (figure 3).

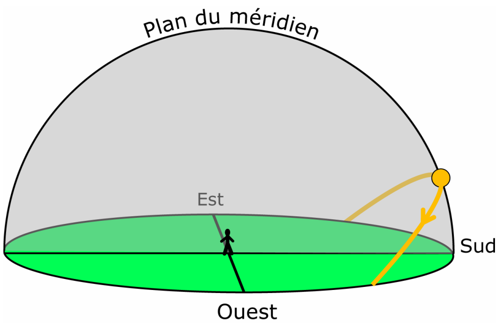

Fig.3*. Un astre culmine lorsqu'il traverse le plan du méridien.*

hauteur méridienne	Ψ^1 Aquarii	Mars (bord supérieur)
Cayenne le 4 septembre	74° 12' 40"	74° 48' 55"
Cayenne le 5 septembre	74° 12' 40"	74° 44' 20"
Paris le 5 septembre	30° 19' 45"	30° 51' 55"

Mais Mars passe dans le méridien de Cayenne 3 h 39 min après être passé dans le méridien de Paris. Les deux observations ne sont pas simultanées et entre temps, la déclinaison de Mars varie. Une correction sur la hauteur méridienne de Mars est donc nécessaire. Et c'est pour la calculer par interpolation linéaire que Richer a dû faire les mesures de hauteur méridienne de Mars deux jours consécutifs (les 4 et 5 septembre).

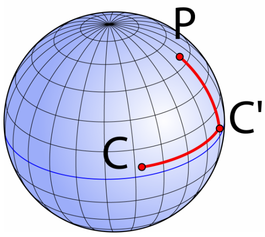

Fig.4. *Le point C'est à la latitude de C (Cayenne) et à la longitude de P (Paris). Cassini utilise deux observations simultanées de Mars, l'une depuis P, l'autre depuis C'.*

Les résultats précédents montrent qu'entre le 4 et le 5 septembre 1672, la hauteur méridienne de Mars à Cayenne a diminué de 4' 35". Cassini en déduit que le 5 septembre, au point C' de la Terre situé à la latitude de Cayenne mais à la longitude de Paris la hauteur méridienne de Mars était :

$$74°\,44'\,20" + 4'\,35" \times \frac{3\text{h}\,39\,\text{min}}{24\text{h}} = 74°\,45'\,02"$$

L'écart entre les hauteurs méridiennes de Ψ^1 Aquarii et de Mars le 5 septembre au point C'est donc :

$$74°\,45'\,02" - 74°\,12'\,45" = 32'\,22"$$

À Paris, l'écart entre les hauteurs méridiennes de Ψ^1 Aquarii et de Mars est :

$$30°\,51'\,55" - 30°\,19'\,45" = 32'\,10"$$

Soit un écart angulaire $\alpha = 12"$.

Quand Mars est dans le plan du méridien de Paris et de C', l'angle α est l'angle sous lequel on voit depuis Mars le segment Paris-point C'. C'est aussi l'écart entre les déclinaisons de Mars vu de Paris et du point C' (figure 5).

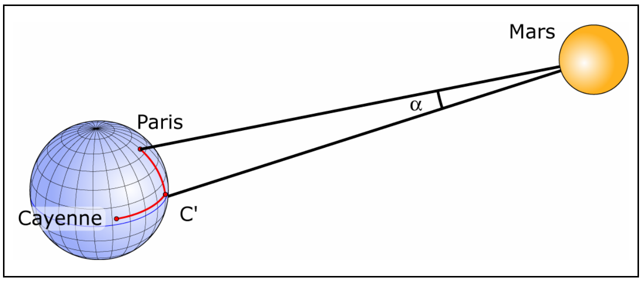

Fig.5*. Les mesures de Cassini à Paris et de Richer à Cayenne ont permis de mesurer l'angle α.*

Cassini et Richer recommencent cette détermination de l'angle α le 9 septembre et le 23 septembre. Ils trouvent respectivement 13" et 17" alors que la distance de la Terre à Mars n'a pas sensiblement changé et vaut toujours 3/8 ua. Du 5 au 23 septembre, l'angle α n'a pas varié de façon mesurable mais chacune des hauteurs méridiennes étant mesurée à la seconde d'arc près, l'incertitude sur une mesure de α est de l'ordre de 4". L'ensemble des trois mesures permet de conclure que $\alpha = (14 \pm 3)"$

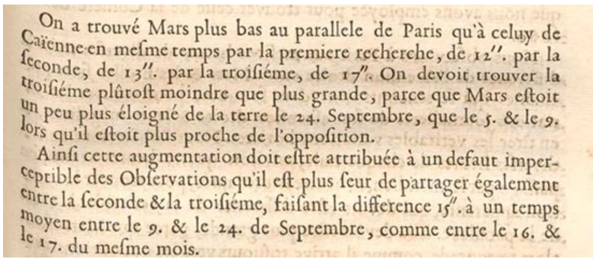
On a trouvé Mars plus bas au parallele de Paris qu'à celuy de Caïenne en meſme temps par la premiere recherche, de 12″. par la ſeconde, de 13″. par la troiſiéme, de 17″. On devoit trouver la troiſiéme plûtoſt moindre que plus grande, parce que Mars eſtoit un peu plus éloigné de la terre le 24. Septembre, que le 5. & le 9. lors qu'il eſtoit plus proche de l'oppoſition.
Ainſi cette augmentation doit eſtre attribuée à un defaut imperceptible des Obſervations qu'il eſt plus ſeur de partager également entre la ſeconde & la troiſiéme, faiſant la difference 15″. à un temps moyen entre le 9. & le 24. de Septembre, comme entre le 16. & le 17. du meſme mois.

Fig.6. *Cassini donne ses trois mesures de 12, 13 et 17" (source).*

En théorie, l'utilisation de l'étoile Ψ^1 Aquarii est inutile ; il suffirait de mesurer les hauteurs méridiennes de Mars à Paris et à Cayenne et de connaître l'écart en latitude de ces deux lieux mais les incertitudes sur les hauteurs méridiennes sont de plusieurs minutes à cause de la réfraction ; elles ne permettent pas de calculer par différence un angle de quelques secondes. Au contraire, les directions de Ψ^1 Aquarii et de Mars sont très voisines. Les erreurs sur les hauteurs méridiennes dues à la réfraction sont identiques et n'entachent pas leur différence.

La parallaxe de Mars est l'angle sous lequel on voit depuis Mars le rayon de la Terre. Lorsque Mars passe au méridien de Paris, il est aussi au méridien de C'.
Les droites Paris - Mars et C'- Mars sont pratiquement parallèles (angle de 14").
Soit z_P et $z_{C'}$ les distances zénithales de Mars à Paris et au point C' lors de son passage au méridien ; z_P et $z_{C'}$ sont complémentaires des hauteurs méri-diennes de Mars h_P et $h_{C'}$(figure 7).

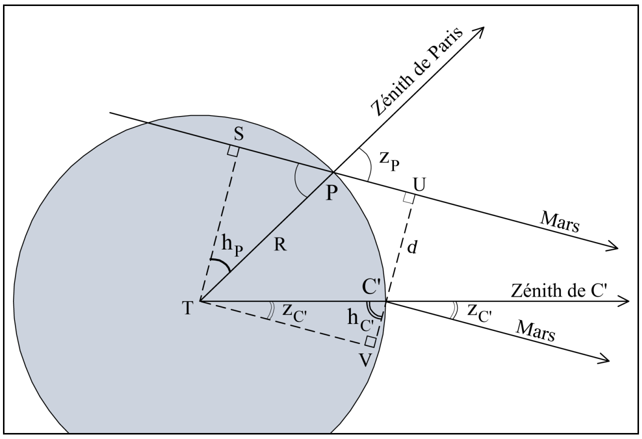

Fig.7. *Mars observé depuis P (Paris) et le point C'.*

D'après la figure 7, la distance d entre les droites Paris-Mars et C'-Mars en unité de rayon terrestre R est :
d = UV – C′V = ST – C′V = R (cos h_P - cos $h_{C'}$).
La distance d est vue depuis Mars sous l'angle $\alpha = 14"$.

La parallaxe de Mars est par définition l'angle p_M sous lequel on voit de Mars le rayon R de la Terre.

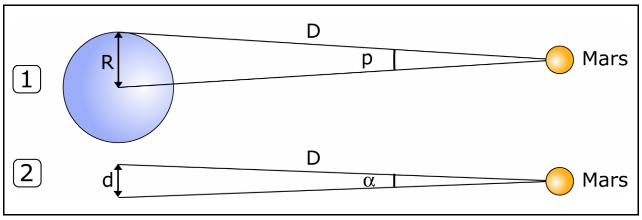

Fig.8. *Proportionnalité entre l'angle et la longueur visée, la distance D étant fixe. D est la distance de la Terre à Mars.*
1. La parallaxe de Mars p est l'angle sous lequel on voit le rayon de la Terre. On a donc R = D×p si l′angle est en radian.
2. La deuxième figure donne d = D×α avec α en radian.
On a donc D = R/p = d/α ou α/p = d/R

$$\frac{\alpha}{p_M} = \frac{d}{R} \text{ d′où } p_M = \alpha\frac{R}{d} = \frac{\alpha}{\cos\ h_P - \cos\ h_{C'}}$$

Dans ce calcul, les angles h_P et $h_{C'}$ n'ont pas besoin d'être connus à la minute près, la principale incertitude provenant de la valeur de α.

$$p_M = 14" \times \frac{1}{\cos 31° - \cos 74°} = 24"$$

et l'incertitude $\Delta p_M = 3" \times \frac{1}{\cos 31° - \cos 74°} = 5"$

La parallaxe de Mars en septembre 1672 était :
$$p_M = (24 \pm 5)"$$

Une fois connue la parallaxe de Mars, la formule R = D × p (figure 8) permet d'avoir sa distance D en fonction du rayon R de la Terre si p est en radians :
p = 24/3600 × π/180 et D = R×3600/24×180/π soit 8 600 R .

Cassini savait que Mars était à 3/8 ua, l'ua vaut donc : 8/3 × 8 600 R ou 23 000 R.

Mais Cassini préfère calculer auparavant la parallaxe du Soleil

La parallaxe du Soleil et sa distance à la Terre

La parallaxe du Soleil est l'angle p_S sous lequel on voit depuis le Soleil le rayon de la Terre (figure 9).

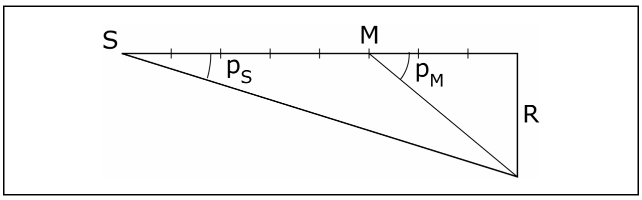

Fig.9. *Parallaxes de Mars et du Soleil.*

Les parallaxes étant de petits angles, elles sont proportionnelles à l'inverse de la distance.

En septembre 1672, Mars est à 3/8 ua de la Terre et sa parallaxe est p_M .
Le Soleil est à 1 ua de la Terre et sa parallaxe est

$$p_S = \frac{3}{8} p_M$$

La parallaxe du Soleil est donc $p_S = \frac{3}{8} \times 24" = 9"$

et son incertitude $\Delta p_S = \frac{3}{8} \times 5" = 2"$

La parallaxe du Soleil est $p_S = (9 \pm 2)"$

La distance moyenne **a** de la Terre au Soleil est directement liée à la parallaxe du Soleil par la relation : $\tan p_S = \frac{R}{a}$.

La distance de la Terre au Soleil est donc $a = \frac{1}{\tan(9")} R = 23\ 000$ rayons terrestres
et l'incertitude sur a, $\Delta a = 5\ 000$ rayons terrestres.
Cassini nous donne la valeur du rayon terrestre en lieues : R = 1 500 lieues. Mais quelle lieue ? Il y a à l'époque un grand nombre de définitions différentes selon les régions et son écrit ne précise pas laquelle il utilise.
Avec un rayon terrestre de 6 400 km, on obtient :
$a = (150 \pm 30) \times 10^6 \text{km}$
Ce résultat constitue la première détermination de l'unité astronomique.
Mais Cassini n'avait pris que ses deux dernières déterminations de α en considération. Il utilise donc 15" (et non 14") comme valeur de α et trouve une distance Terre-Soleil de 140 millions de km. ■