Convergence : forme d'une lentille optique

G. Paturel, Observatoire de Lyon

Résumé : *Nous allons expliquer et montrer par un calcul très simple que la forme de la partie convexe d'une lentille convergente plan-convexe est un paraboloïde de révolution. L'idée sous-jacente est la recherche d'un moyen de fabriquer une telle lentille expérimentale à très bas prix.*

Analyse du problème

Le problème est donc toujours le même : comment faire converger l'onde qui nous vient d'une étoile lointaine. Pour l'instant nous ne considérerons qu'une seule longueur d'onde. Nous verrons en conclusion les défauts qui résulteront quand l'onde n'est plus monochromatique, ce qui est le cas normal. Pour l'instant, l'onde sera donc plane et monochromatique.

La différence avec le miroir, que nous avions étudié précédemment, est que la lumière va traverser le verre.

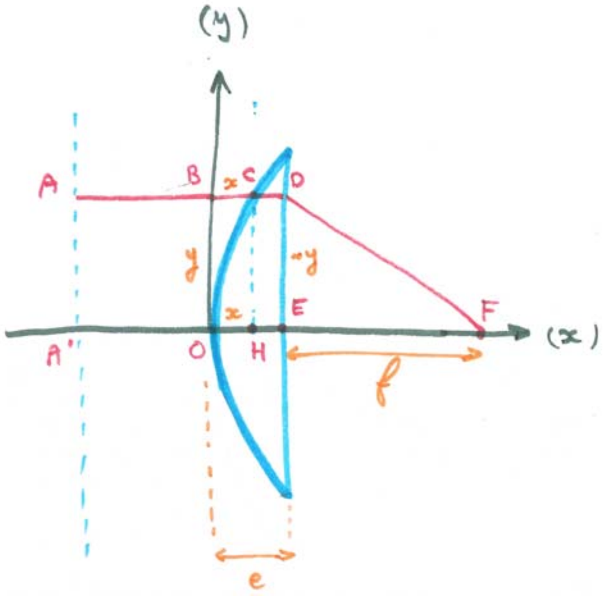
Comment faire pour former une image de la source ponctuelle lointaine ? Il suffit de faire converger les rayons lumineux en un seul point, de telle manière que tous les rayons, en phase dans l'onde plane, arrivent en phase au point de convergence. Par simplicité nous allons considérer une lentille plan-convexe. La face arrière sera plane. La face avant de la lentille aura une certaine forme que nous allons calculer.

Commençons par comprendre la physique, avant même de faire des calculs. L'onde arrive par la gauche (figure ci-contre). Les plans d'égale phase sont représentés en pointillés (plan AA'). Le temps du trajet de A à F doit être égal au temps du trajet de A' à F. Telle est la condition pour obtenir, en F, une bonne image d'une source ponctuelle lointaine. Puisque de A à F la longueur géométrique du trajet est plus longue que celle du trajet de A' à F, il faut ralentir le rayon A'F pour compenser exactement la différence de longueur des trajets. Comment ralentir un rayon de lumière ? C'est très simple, on lui fait traverser une épaisseur de verre, car dans le verre la lumière se propage moins vite[1]. Le rayon lumineux passant de A à F, sera également ralenti, mais moins, puisqu'il traversera une épaisseur de verre moindre. Plus nous irons à la périphérie de la lentille et plus la longueur de verre à traverser sera faible. La lentille de verre devra avoir une forme qui s'amincit vers les bords. Nous en avons tous l'expérience, mais saurions-nous calculer la forme précise à donner à cette lentille ?

Équation de la surface convexe

Nous voulons calculer l'équation de la forme de la surface convexe de la lentille, pour que le ralentissement des rayons compense exactement la différence de longueur géométrique du trajet.

Nous allons considérer le repère *(Ox,Oy)*. L'axe des *x* étant le long de l'axe optique, compté positivement de la gauche vers la droite (dans le sens de progression de l'onde incidente), l'axe des *y* passera par *O* et sera perpendiculaire à l'axe optique. La direction de *Oy* a peu d'importance, car, par raison de symétrie, la surface doit être une



[1] La vitesse de la lumière dans le verre est égale à la vitesse de la lumière dans le vide, divisée par l'indice de réfraction du verre : v=c/n

surface de révolution autour de la ligne de visée, qui sera, de fait, l'axe optique de notre système. Il suffira de trouver l'équation de la courbe d'intersection de la lentille et d'un plan quelconque passant par l'axe optique. Nous allons calculer l'équation de cette courbe.

Posons *OE=e et EF=f* (évidemment, *e* sera appelée l'épaisseur de la lentille et *f* sera appelée la distance focale). Écrivons l'égalité des temsp de trajet de Aà F et de A' à F, que nous noterons t(A,F) et t(A',F).

t*(AB)+t(BC)+t(CD)+t(DF)=*
t(A'O)+t(OH)+t(HE)+t(EF)

Évidemment, on a[2] : t(AB)=t(A'O) et t(CD)≈t(HE), de sorte que l'égalité se simplifie en :

t(B,C)+t(D,F)=t(OH)+t(EF)

Comme le temps s'obtient en divisant la distance par la vitesse : *t(BC)=BC/c=x/c, t(DF)=DF/c ; t(OH)=OH/v=OH×n/c=x n/c et t(EF)=EF/c=f/c.*
où *n* est l'indice de réfraction (voir la note au bas de la page précédente).
En multipliant chaque membre par c, on obtient :
x +DF=n.x + f
De plus, $DF^2=y^2+f^2$, ce qui conduit à la relation :

$$\sqrt{y^2+f^2}-f=(n-1)x \qquad (1)$$

En supposant que y est petit devant la distance focale ($y \ll f$), la racine carrée se simplifie :

$$\sqrt{y^2+f^2}=f\sqrt{\frac{y^2}{f^2}+1}\approx f\left(\frac{y^2}{2f^2}+1\right)=\frac{y^2}{2f}+f$$

Ainsi notre équation (1) devient :

$$\frac{y^2}{2f}=(n-1)x \qquad (2)$$

égalité dans laquelle on reconnaît l'équation d'une parabole représentant la fonction :

$$y\mapsto\frac{1}{2(n-1)f}y^2$$

Telle est l'équation que doit avoir la génératrice de la face bombée d'une lentille plan-convexe. Si l'indice de réfraction ne dépendait pas de la longueur d'onde, la focalisation serait bonne, à l'approximation ($y \ll f$). Comme dans l'article précédent, la quantité *x* sera appelée la "*déformation*". C'est l'écart à la planéité.

Nous allons poursuivre les conséquences quand la forme parabolique est approximée par une sphère de rayon R. Si le centre de courbure est désigné par G, l'application du théorème de Pythagore au triangle CHG conduit à (G est évidemment sur l'axe *Ox*) :

$$y^2+(R-x)^2=R^2$$

qui, compte tenu de la condition $x \ll R$ (condition de faible courbure de la lentille) conduit à :

$$R=\frac{y^2}{2x} \qquad (3)$$

Si on rapproche l'équation (3) de l'équation (2), on s'aperçoit que le rayon de courbure s'écrit :

$$R=(n-1)f$$

On retrouve l'équation classique reliant le rayon de courbure à la focale, dans le cas d'une lentille plan-convexe.

Nous espérons que ce petit exercice incitera certains d'entre vous à faire une étude plus détaillée dans le cas par exemple d'une lentille de forme différente.

Problème du chromatisme

L'indice de réfraction dépend de la longueur d'onde. L'effet dépend de la nature des verres utilisés. L'effet *normal* est une diminution de l'indice avec l'augmentation de la longueur d'onde.

On constate sur notre schéma que la partie externe de la lentille a la forme approximative d'un prisme. Les grandes longueurs d'onde (lumière rouge) sont moins déviées que les courtes longueurs d'onde (lumière bleue). La focale en rouge est plus grande que la focale en lumière bleue. C'est ce qu'on appelle le *chromatisme* de la lentille.

En associant une lentille convergente et une lentille divergente, d'indices différents, il est possible de compenser cet effet de chromatisme, tout en conservant une convergence pour le *doublet* ainsi réalisé.

Application pratique

Passons à une application simple. Il est possible de réaliser simplement une lentille cylindrique, comme le montre la photo 1 ci-dessous, avec un morceau de plastique d'emballage transparent et un peu de pâte à modeler. Le collage se fait avec de la colle cyanoacrylate. On emplit le cylindre d'eau... et la lentille est faite.
Notre réalisation est loin d'être une lentille mince, mais elle converge, avec toutefois une forte

[2] En toute rigueur CD n'est pas égale à HE car en C le rayon est réfracté et n'est pas parallèle à l'axe optique. Cependant comme nous considérons une lentille à faible courbure, l'écart au parallélisme est faible, ce qui nous autorise à poser CD≈HE.

aberration de sphéricité : les rayons externes convergent plus que les rayons centraux. Il suffirait de diaphragmer la lentille pour obtenir une meilleure image. Malgré tout, Une source double donne bien deux images.

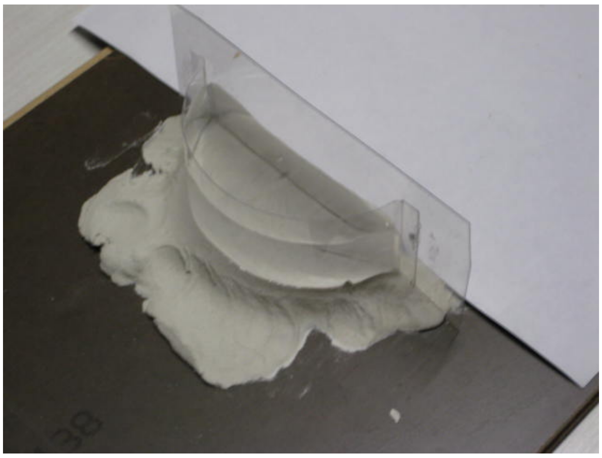


Photo 1 : *Une lentille cylindrique faite avec du plastique transparent, de la pâte à modeler et de l'eau.*

Photo 2 : *L'aberration de sphéricité longitudinale est bien visible.*

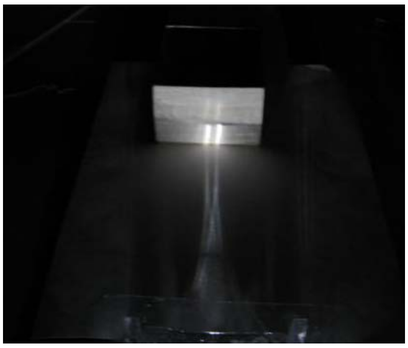


Photo 3 : *Même sans diaphragmer, la lentille donne bien les deux images d'une source double, même si, de par sa forme, l'image d'un point est une fente.*

Encore un délire

Nous avions terminé notre article précédent de cette série par un délire de jeune astronome. Nous poursuivons dans la même veine.

Quand j'étais jeune, j'imaginais un miroir de télescope parfaitement plan, mais tel que chaque élément de sa surface centraliserait, en un même point, le signal reçu, avec un retard fonction de la position. Un tel miroir serait analogue à une lentille. En ajustant le retard, il serait même possible, sans déplacer le miroir, de viser n'importe quelle direction du ciel.

Vous pouvez penser que cela est encore un délire fou. Non, cela se pratique, certes pas avec des longueurs d'onde optique (du moins pas encore), mais en radio, avec des grandes longueurs d'onde, dont on peut maîtriser la phase. Ceci est utilisé par exemple à Nançay avec le **réseau décamétrique** (Photo 4).

Si nous possédions des guides d'onde parfaits pour la lumière, la chose serait possible en optique. Des fibres optiques sont envisageables mais il faut contrôler le chemin optique avec une grande précision. C'est ce que les astronomes réalisent actuellement en interférométrie.

En optique on pourrait aussi, et plus simplement, imaginer une lentille plane, faite d'une lame à faces parallèles et telle que son indice de réfraction varierait du centre vers le bord. On obtiendrait un effet de convergence normale. Le problème serait de doper le verre de manière variable, mais parfaitement contrôlée, du centre vers le bord.

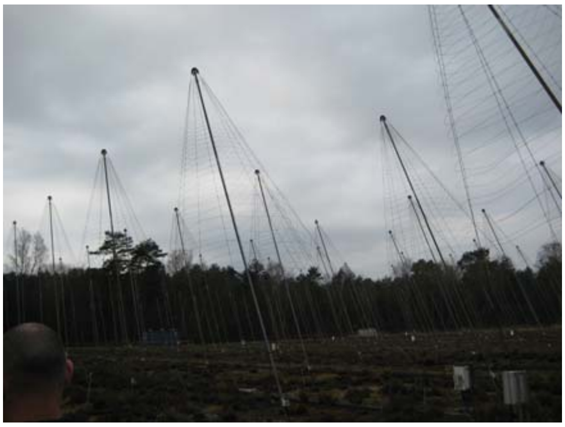


Photo 4 : *Le réseau décamétrique de Nançay. Chaque antenne (perche en forme de sapin) constitue un élément d'une sorte de "lentille plane". Ce réseau est utilisé pour étudier les sursauts radioélectriques de Jupiter ou de la couronne solaire.*

■