AVEC NOS ELEVES

Température des atmosphères stellaires

Serge Latouche

Résumé : *Voici un petit problème " clefs en main" pour un niveau de classe Terminale. Nous ne donnons pas de corrigé car la démarche est bien détaillée.*

Partie A

Un corps noir est un corps opaque non réfléchissant. La loi qui décrit l'intensité I du rayonnement émis par un corps noir de température absolue T, à chaque longueur d'onde λ , a été établie par Planck :

$$I(\lambda)=\frac{2hc^2}{\lambda^5}\times\frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}}-1}$$

où h est la constante de Planck, k celle de Boltzmann et c la vitesse de la lumière dans le vide.

$$\begin{cases}\lambda \text{ est en m} & \\ h=6{,}62\times10^{-34}\,\mathrm{J}.s & \text{J est le joule, unité d'énergie ;}\\ k=1{,}38\times10^{-23}\ \mathrm{J.K^{-1}} & \text{K est le kelvin, unité de température absolue,}\\ c=3\times10^{8}\ \mathrm{m}.s^{-1} & \left(\text{le zéro absolu correspondant à } -273{,}15°C\right)\end{cases}$$

1) Compléter le tableau ci-dessous : Pour T=3000 K, 4500K et 6000 K, respectivement.

λ (m)	10^{-7}	2.10^{-7}	3.10^{-7}	4.10^{-7}	5.10^{-7}	6.10^{-7}	7.10^{-7}	8.10^{-7}	9.10^{-7}	10^{-6}
$I(\lambda)$ T=3000 K										
$I(\lambda)$ T=4500 K										
$I(\lambda)$ T=6000 K										

2) En utilisant le mode trace de votre calculatrice et un tableau de valeurs approprié, rechercher une approximation à 10^{-8} près de la valeur λ_m de λ qui rend I maximale pour T=3000 K, T=4500 K et T=6000 K. Puis représenter sur un même graphique l'intensité du rayonnement émis par un corps noir en fonction de la longueur d'onde et pour chacune des températures de 3000 K, 4500 K et 6000 K. En abscisse on prendra 1,5 cm pour $\lambda=10^{-7}$, en ordonnée on prendra 3 cm pour 10^{13}.

3) Calculer enfin dans les trois cas étudiés ci-dessus le produit $\lambda_m\times T$.

4) Que pouvez vous déduire de l'étude précédente ?

Partie B

On se propose maintenant d'étudier quelques approximations de I :

1) Justifier que pour de grandes valeurs de λ , la loi de Planck peut être approchée par la loi de Rayleigh-Jeans, soit : $I(\lambda) \approx \dfrac{2ckT}{\lambda^4}$.

2) Dans la suite du problème on supposera $\lambda T < 3 \times 10^{-3}$. Quelle erreur relative commet-on, si l'on remplace I donné par : $I(\lambda) = \dfrac{2hc^2}{\lambda^5} \times \dfrac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}$ par $I(\lambda) \approx \dfrac{2hc^2}{\lambda^5 \times e^{\frac{hc}{k\lambda T}}}$?

C'est l'approximation de Wien, pour λT « petit » : $I(\lambda) \approx \dfrac{2hc^2}{\lambda^5 \times e^{\frac{hc}{k\lambda T}}}$.

3) Etudier la fonction I définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $I(\lambda) = \dfrac{2hc^2}{\lambda^5 \times e^{\frac{hc}{k\lambda T}}}$.

4) On appelle λ_m , la valeur de λ qui correspond au maximum de I : évaluer le produit $\lambda_m T$ et comparer le résultat obtenu avec celui de la partie A.

5) En fait, la loi de Wien dit que la longueur d'onde λ_m qui, dans le spectre d'un corps noir, correspond au maximum d'énergie, est donnée par :

$$\lambda_m \times T = 2898\ \mu\text{m.K} .$$

L'erreur commise est-elle compatible avec le résultat de la question 2 ?

6) On assimilera le rayonnement d'une étoile à celui d'un corps noir.
a) L'étude du spectre de la lumière du *Soleil* montre que le maximum d'émission se trouve à la longueur d'onde $\lambda_m = 0{,}460\ \mu$m. En déduire la température des gaz à la surface du *Soleil.*
b) *Bételgeuse*, étoile de la constellation d'*Orion,* apparaît pour un observateur terrestre de couleur rouge. Sachant que la longueur d'onde du rouge est supérieure à celle du jaune, comparer la température externe de *Bételgeuse* à celle du *Soleil*.
c) Contrôler vos résultats à l'aide d'un atlas astronomique ou de toute autre source.

.

Complément possible (après le calcul intégral) :

L'énergie totale E émise par seconde par une étoile à la température T est donnée par :

$$E = \int_0^{+\infty} I(\lambda) d\lambda .$$

On calcule donc, pour 0<a<b : $\int_a^b I(\lambda) d\lambda = C \int_a^b \frac{1}{\lambda^5} e^{\frac{-hc}{k\lambda T}} d\lambda$ puis on fait un passage à la limite.

A T fixé, cette intégrale s'écrit $C \int_a^b \frac{1}{\lambda^5} e^{\frac{C'}{\lambda}} d\lambda$ (en posant $C' = \dfrac{-hc}{kT}$) et peut se calculer par plusieurs intégrations par parties successives, en posant pour la première intégration $u(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^3}$ et $v'(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^2} e^{\frac{C'}{\lambda}}$, puis en renouvelant le même principe.

■