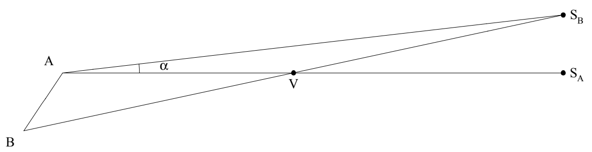
La distance Terre-Soleil déterminée entre Versailles et La Réunion (***)

Omar Abderrazik, Jérôme Barral, Clémence Leclerc, Béatrice Sandré, Lucie Tonnelier

Résumé : *Nous avons essayé de mesurer la distance Terre – Soleil par parallaxe à partir de nos photos du passage de Vénus prises depuis Versailles (lieu A) et celles de Thérèse Derolez prises depuis Saint Louis-de-la Réunion (lieu B). Une méthode itérative originale est proposée qui permet d'utiliser des clichés dont l'orientation n'est pas connue et dont la qualité n'est pas assez bonne pour donner une mesure précise du bord du Soleil. Ce travail a été réalisé dans le cadre des TIPE d'une classe de PCSI.*



S_A et S_B sont les deux points de la surface solaire où se forme l'ombre de Vénus vue depuis les deux points d'observation A et B. Pour déterminer l'écart angulaire α, il " suffit " de mettre les deux photos prises au même instant à la même échelle, puis de les superposer après s'être assuré de leur orientation.

Le télescope dont nous disposions est mobile. Nous avons fait la mise en station grâce à une lunette polaire avec un maximum de soin, mais nous ne pouvons donner la précision sur ce réglage. Nous avons placé le grand côté de la photo parallèlement à l'axe du télescope mais ce deuxième réglage est très approximatif. Une simple superposition des photos risque donc d'engendrer de grosses erreurs.

La mise à l'échelle des deux photos peut se faire grâce au diamètre du Soleil qui doit être le même. Mais la superposition de photos du Soleil prises consécutivement, du même lieu, avec le même télescope mais des temps de pose différents, nous a révélé des variations du rayon du Soleil de l'ordre de 2,5 % soit 24". C'est justement l'ordre de grandeur de l'écart angulaire à mesurer.

Ces remarques expliquent pourquoi nous avons eu recours à une méthode plus complexe pour l'orientation et la mise à l'échelle. L'orientation est obtenue grâce au parallélisme des cordes décrites par Vénus vue de A et B. La mise à l'échelle est obtenue grâce aux longueurs des cordes.

Si on néglige les vitesses $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ des points A et B dans le référentiel géocentrique devant la vitesse $\vec{V}_T$ du centre de la Terre dans le référentiel héliocentrique, les vitesses de déplacement de l'ombre de Vénus vue des deux lieux sont identiques et constantes. En faisant cette approximation nous déterminerons une première valeur de la distance Terre – Soleil. Le résultat obtenu nous permettra de calculer les vitesses $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ et donc de corriger notre calcul.

1. Lecture des photos

A l'aide d'un logiciel de dessin vectoriel (Visio 2000), nous avons déterminé sur les photos prises depuis Versailles (A) le rayon du Soleil (78,9 mm) et les distances dA_i entre le centre du Soleil et le centre de Vénus.

Nous avons ensuite modifié l'échelle des photos prises de Saint Louis (B) pour que le rayon du Soleil soit approximativement le même puis mesuré les distances dB_i entre le centre du Soleil et le centre de Vénus. Les mesures de dA et dB sont données dans le Tableau 1 à la fin de l'article.

2. Coordonnées du centre du Soleil et première évaluation de la distance Terre – Soleil

La corde décrite par l'ombre de Vénus est choisie comme axe x'x et la position occupée par Vénus à 8h30 TU comme origine.

Dans l'hypothèse où v_A et v_B sont négligeables devant V_T, on note e la distance parcourue par l'ombre pendant une demi-heure.

Le Tableau 2 à la fin de l'article donne l'abscisse de l'ombre de Vénus pour chacune des photos.

Un point quelconque de coordonnées x et y dans le plan de la photo, est à la distance $l_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + y^2}$ du centre de Vénus à l'heure t_i.

Soit x_{CA} et y_{CA} les coordonnées du centre du Soleil sur les photos prises de A et e_A la valeur de e sur ces photos.

Si les valeurs des dAi étaient parfaites, la fonction $U(x,y,e) = \sum_i (l_i - dA_i)^2$ serait nulle en $(x = x_{CA}, y = y_{CA}, e = e_A)$.

Les mesures étant entachées d'erreur, $U(x,y,e)$ ne s'annule pas mais son minimum défini (x_{CA}, y_{CA}, e_A).

A l'aide d'un logiciel de calcul formel (Maple), nous avons recherché les valeurs de x, y et e qui annulaient les dérivées de U par rapport à x, y et e et obtenu :

$$x_{CA} = -2,4412 \text{ mm}$$

$$y_{CA} = +52,6753 \text{ mm}$$

$$e_A = 10,0452 \text{ mm par } 1/2 \text{ heure}$$

$$U(x_{CA}, y_{CA}, e_A) = 0,250 \text{ mm}^2$$

Nous avons fait de même pour l'ensemble des photos prises de B et obtenu :

$$x_{CB} = -3,0177 \text{ mm}$$

$$y_{CB} = +51,1523 \text{ mm}$$

$$e_B = 10,3229 \text{ mm par } 1/2 \text{ heure}$$

$$U(x_{CA}, y_{CA}, e_A) = 0,182 \text{ mm}^2$$

On constate que e_A et e_B sont légèrement différentes. Il suffit de multiplier toutes les longueurs mesurées sur les photos prises depuis A par e_B/e_A pour que les deux séries de photos soient à la même échelle :

$$X_{CA} = x_{CA} \times \frac{e_B}{e_A} = -2,5087 \text{ mm}$$

$$Y_{CA} = y_{CA} \times \frac{e_B}{e_A} = +54,1318 \text{ mm}$$

La distance entre les deux points (X_{CA}, Y_{CA}) et (x_{CB}, y_{CB}) est la distance entre les ombres de Vénus sur les photos prises depuis A et B à 8h30 avec pour échelle 15,76' (le rayon angulaire du Soleil le 8 Juin 2004) représenté par 78,9 mm :

$$\alpha = \sqrt{(X_{CA} - x_{CB})^2 + (Y_{CA} - y_{CB})^2} \times 15,76 \times 60 / 78,9 = 36,2''$$

A 8h30 le calcul expliqué p 26 du n°105 des cahiers Clairaut donne AB sin ψ = 1,3455 en unité de rayon terrestre d'où

$$a = R\frac{AB \sin \Psi}{\alpha} \times \frac{z}{1-z} = 127,6 \text{ millions de km}$$

Où R = 6380 km est le rayon de la Terre et $z = \frac{SV}{ST} = 0,723$ le rapport des rayons des orbites de Vénus et de la Terre.

3. Calcul des vitesses

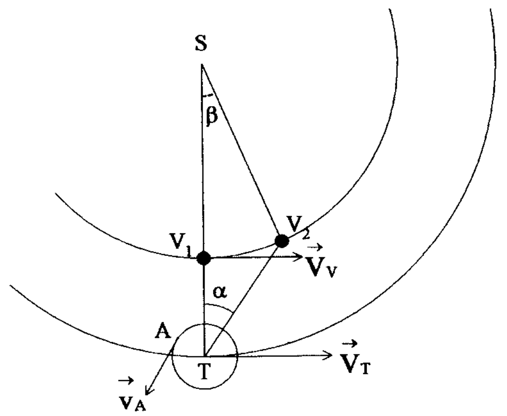
Connaissant a, on peut calculer $V_T = \frac{2\pi a}{T_T}$ où

T_T = 1 an.

Si a 127,6 millions de km, on obtient
V_T = 25,2 km/s.

λ_A étant la latitude de A, $v_A = \frac{2\pi R \cos \lambda_A}{T_o}$

où T_o = 1 jour est la période de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.
A Versailles, λ_A = + 48°48'00" et v_A = 0,30 km/s.
A Saint Louis, λ_B = – 21°16'24" et v_B = 0,43 km/s ; v_A et v_B sont petits devant V_T mais non négligeables. Il faut en tenir compte dans le facteur d'échelle.



Nous allons donc établir les expressions des vitesses angulaires[1] de déplacement de l'ombre de Vénus par rapport au Soleil vue depuis A et B.

Soit $v'_A = \dfrac{\vec{v}_A . \vec{V}_T}{V_T}$ la projection de $\vec{v}_A$ sur $\vec{V}_T$.

$$\frac{d\beta}{dt} = \overset{\square}{\beta} = \frac{V_V}{z \times a} - \frac{V_T + v'_A}{a}$$

V_V étant la vitesse de Vénus dans le référentiel héliocentrique

Or $V_V = \dfrac{2\pi z a}{T_V}$

T_V étant la période de révolution de Vénus, et d'après la troisième loi de Kepler, $T_V = T_T\sqrt{z^3}$.

D'où $V_V = \dfrac{2\pi a}{T_T} \times \dfrac{z}{\sqrt{z^3}} = V_T \times \dfrac{1}{\sqrt{z}}$

et

$$\overset{\square}{\beta} = \frac{V_T}{a}\left(\frac{1}{z\sqrt{z}} - 1\right) - \frac{v'_A}{a} = \frac{V_T}{a}\left(\frac{1}{z\sqrt{z}} - 1\right)\left(1 - \frac{v'_A}{V_T\left(\frac{1}{z\sqrt{z}} - 1\right)}\right)$$

Les angles α et β étant petits, la relation des sinus dans le triangle SV_2T s'écrit :

$$\frac{\alpha}{z \times a} = \frac{\beta}{(1-z)a} \quad \text{d'où}$$

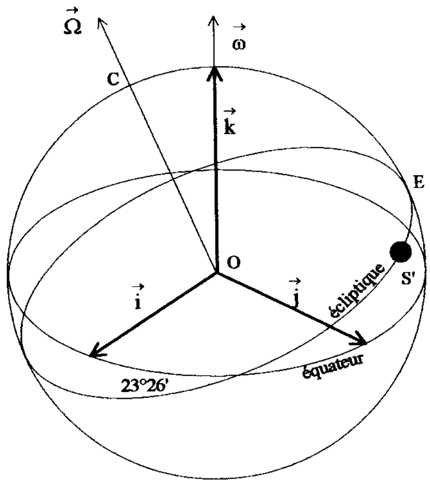
$$\overset{\square}{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{V_T}{a}\frac{z}{1-z}\left(\frac{1}{z\sqrt{z}} - 1\right)\left(1 - \frac{v'_A}{V_T\left(\frac{1}{z\sqrt{z}} - 1\right)}\right)$$

Pendant le même intervalle de temps (1/2 heure par exemple), le déplacement de l'ombre de Vénus par rapport au Soleil peut s'écrire :

$$e\left(1 - \frac{v'_A}{V_T\left(\frac{1}{z\sqrt{z}} - 1\right)}\right) \text{ vu de A et}$$

$$e\left(1 - \frac{v'_B}{V_T\left(\frac{1}{z\sqrt{z}} - 1\right)}\right) \text{ vu de B.}$$

Il faut donc calculer $\dfrac{v'_A}{V_T}$ et $\dfrac{v'_B}{V_T}$ qui sont fonctions du temps, les angles de $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ avec $\vec{V}_T$ étant fonction du temps.



Nous reprenons ici les notations et le calcul de la page 26 du n°105 des cahiers Clairaut.

Soit $\vec{\omega}$ le vecteur rotation de la Terre sur elle-même.

$$\vec{v}_A = R\,\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{v}_B = R\,\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OB}$$

(O est le centre de la Terre, $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont des vecteurs unitaires).

Soit $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation du centre de la Terre autour du Soleil.

$$\vec{v}_T = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{ST} = -a\,\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OS'}$$

[1]A cause de problèmes typographiques, les dérivées par rapport au temps d'une grandeur sont notées par le symbole de cette grandeur surmonté d'un petit carré blanc, au lieu du point noir habituellement utilisé.

($\overrightarrow{OS'}$ est un vecteur unitaire colinéaire à la direction Terre – Soleil).

Soit la base unitaire orthonormée et directe définie par :

$\vec{i}$ intersection du plan équatorial et du plan méridien de longitude 0°

$\vec{j}$ intersection du plan équatorial et du plan méridien de longitude 90°

$\vec{k}$ colinéaire à l'axe des pôles et orienté du Sud vers le Nord.

$\vec{\omega} = \frac{2\pi}{T_o}\vec{k}$

$\vec{\Omega}$ est perpendiculaire au plan de l'écliptique qui fait un angle de 23° 26' avec le plan de l'équateur.

L'angle de $\vec{\Omega}$ avec le plan de l'équateur est donc $\lambda_C = 90° - 23°26' = 66°34'$.

Le 8 Juin, le soleil est dans la direction de S' ; d'après les éphémérides, son ascension droite est 5h 07min. Le jour du solstice d'été, le soleil est dans la direction de E et son ascension droite est 6h 00min. L'écart entre les longitudes de E et de S' est donc

$\varphi_E - \varphi_{S'} = 53\,\text{min} = 13{,}25°$.

La longitude de C est donc

$$\varphi_C = \varphi_{S'} + 13{,}25° + 180° = 360° \times \frac{12 - h_{TU}}{24} + 13{,}25° + 180°$$

On en déduit

$$\vec{\Omega} = \frac{2\pi}{T_T}\left[\sin\lambda_C\,\vec{k} + \cos\lambda_C\left(\cos\varphi_C\,\vec{i} + \sin\varphi_C\,\vec{j}\right)\right]$$

On peut alors calculer $\vec{v}_T = -a\,\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OS'}$, $\vec{v}_A = R\,\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}_B = R\,\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OB}$ puis

$\frac{v'_A}{V_T} = \frac{\vec{v}_A \cdot \vec{V}_T}{V_T^2}$, $\frac{v'_B}{V_T} = \frac{\vec{v}_B \cdot \vec{V}_T}{V_T^2}$ et

$$\varepsilon_A = \frac{v'_A}{V_T\left(\frac{1}{z\sqrt{z}} - 1\right)} \text{ et } \varepsilon_B = \frac{v'_B}{V_T\left(\frac{1}{z\sqrt{z}} - 1\right)}.$$

ε_A et ε_B sont comme $\varphi_{S'}$ fonction de l'heure TU et calculés à l'aide du logiciel de calcul.

4. Calcul de la distance Terre – Soleil

Les cordes décrites par l'ombre de Vénus seront toujours choisies comme axe des abscisses avec pour origine la position de l'ombre à 8h 30 TU. Nous écrirons que l'abscisse de l'ombre de Vénus vue depuis A est :

à 9h 00 TU : $x_{9h} = x_{8h30} + e\left(1 - \varepsilon_{A(8h45)}\right)$

à 9h 30 TU : $x_{9h30} = x_{8h} + e\left(1 - \varepsilon_{A(9h15)}\right)$

à 8h 00 TU : $x_{8h} = x_{8h30} - e\left(1 - \varepsilon_{A(8h15)}\right)$ ….

De même que dans le paragraphe 2, on calcule les $l_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + y^2}$, la fonction

$U(x,y,e) = \sum_i (l_i - dA_i)^2$ et les valeurs

$(x = x_{CA}, y = y_{CA}, e = e_A)$ qui annulent les dérivées de U par rapport à x, y et e. On fait de même pour B.

Puis la mise à l'échelle des photos prises de A : $X_{CA} = x_{CA} \times \frac{e_B}{e_A}$ et $Y_{CA} = y_{CA} \times \frac{e_B}{e_A}$

On calcule

$$\alpha = \sqrt{(X_{CA} - x_{CB})^2 + (Y_{CA} - y_{CB})^2} \times 15{,}76 \times 60 / 78{,}9$$

et la distance Terre – Soleil.

En ayant pris a = 127 millions de km, on obtient α = 27,3" et a = 169×10^6 km. Il suffit de réinjecter cette nouvelle valeur de a en tête de programme et de recalculer α et a … et ce jusqu'à ce que les valeurs initiale et finale de a soient identiques, ce qui se produit au quatrième calcul (avec 4 chiffres significatifs).

On obtient alors α = 29,03" et a = $159{,}2\times10^6$ km. Il reste à déterminer l'incertitude sur ce résultat.

5. Précision de la mesure

Si les mesures des dA_i avaient été parfaites, nous aurions obtenu $U(x_{CA}, y_{CA}, e_A) = 0$ alors que le calcul nous donne

$$U(x_{CA}, y_{CA}, e_A) = \sum_i (l_i - dA_i)^2 = 0{,}230.$$

Comme nous utilisons 10 photos, la valeur de l'écart type entre les dA_i et les l_i est donc :

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{0{,}23}{10}} = 0{,}15\text{ mm}$$

De même,

$U(x_{CB}, y_{CB}, e_B) = \sum_i (l_i - dB_i)^2 = 0{,}180$ et

comme nous utilisons 12 photos,

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{0,18}{12}} = 0,12 \text{ mm}$$

En choisissant pour les dA_i et les dB_i des valeurs aléatoires dans des distributions gaussiennes de largeurs σ_A et σ_B, autour des valeurs mesurées, nous avons obtenu un écart type de 18 millions de km sur a. C'est l'ordre de grandeur de l'incertitude sur la distance Terre – Soleil :

$$\boxed{a = (159 \pm 18) \times 10^6 \text{km}}$$

6. Utilisation d'autres lieux d'observation

Afin d'améliorer le résultat et son incertitude, il est possible de refaire le même travail à partir de photos prises d'autres points de la surface de la Terre. Nous avons réutilisé celles de Saint-Louis-de-La-Réunion et remplacé Versailles par Longyearbyen au Spitzberg (photos prises par Gilles Dodray).

Un calcul rigoureusement identique au précédent nous donne :

$$a = (146 \pm 11) \times 10^6 \text{km}$$

L'intersection des deux domaines d'incertitude nous permet d'écrire :

$$\boxed{a = (149 \pm 8) \times 10^6 \text{km}}$$

Ce calcul n'a nécessité aucune hypothèse sur les orientations et les échelles des photos. Mais il assimile la trajectoire de l'ombre de Vénus à une droite, ce qui revient à négliger les composantes des vitesses $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ perpendiculaires à $\vec{V}_T$ et à $\overrightarrow{OS'}$ et donc parallèles à $\vec{\Omega}$.

Tableau 1 : Mesures des distances apparentes entre le centre de Vénus et le centre du Soleil sur des clichés mis à la même échelle et pris depuis deux sites A et B.

heure TU	5h45	6h00	6h30	7h00	7h30	8h00	8h30	9h00	9h15	9h30	10h00	10h30	10h45	11h00
dA_i en mm		71,076	64,698	59,552	55,954	52,980	52,659	54,072		57,362	61,903	67,807		
dB_i en mm	74,055	70,745	63,780	58,334	54,230	51,553	51,305		54,222	56,521	61,303	67,760	71,128	74,867

Tableau 2 : Abscisses de l'ombre de Vénus pour chacune des photos. e est la distance parcourue par l'ombre de Vénus en une demi-heure.

heure TU	5h45	6h00	6h30	7h00	7h30	8h00	8h30	9h00	9h15	9h30	10h00	10h30	10h45	11h00
x_i	– 5,5 e	– 5 e	– 4 e	– 3 e	– 2 e	– e	0	+ e	+ 1,5 e	+ 2 e	+ 3 e	+ 4 e	+ 4,5 e	+ 5 e

■