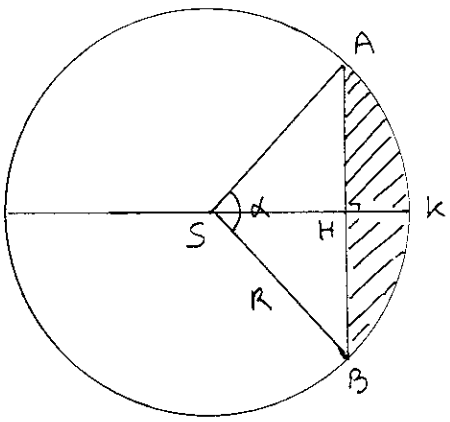
Une formation en deux ans en S

Gérard Frizet

Nous publions ici la solution du TP proposé par Gérard Frizet à ses élèves de terminale S : "l'éclipse de Soleil du 11 août 1999" (cf. CC n° 92 p. 10-11).

Partie A

1) Formule donnant μ en fonction de α



s étant l'aire du segment circulaire hachuré, on a :

$$\mu = 2\,s / \pi R^2$$

s_1 étant l'aire du secteur circulaire ASB et s_2 celle du triangle isocèle ASB on a :

$$s = s_1 - s_2$$

Calcul de s_1 :
On sait que l'aire d'un secteur circulaire est proportionnelle à l'angle au centre donc :

$$s_1 / \alpha = \pi R^2 / 2\pi \text{ d'où :}$$

$$\mathbf{s_1 = (1/2)\,R^2\alpha}$$

avec α en radians

Calcul de s_2 :
$s_2 = (1/2)\,AB \times SH = AH \times SH$
dans le triangle rectangle SHA on a :
$\sin(\alpha/2) = AH / SA = AH / R$
$\cos(\alpha/2) = SH / SA = SH / R$
Donc $s_2 = R^2 \cos(\alpha/2)\sin(\alpha/2)$ d'où :

$$\mathbf{s_2 = (1/2)\,R^2 \sin\alpha}$$

Remarque :
$s_2 = (1/2)\,SA \cdot SB \cdot \sin\alpha = (R^2 \sin\alpha)/2$

calcul de s :
$s = (1/2)\,R^2(\alpha - \sin\alpha)$
$2s = R^2(\alpha - \sin\alpha)$

calcul de μ : $\mu = (1/\pi)(\alpha - \sin\alpha)$
α en radians et $0 < \alpha < \pi$

2) Recherche de α dans le cas où $\mu = 0{,}5$

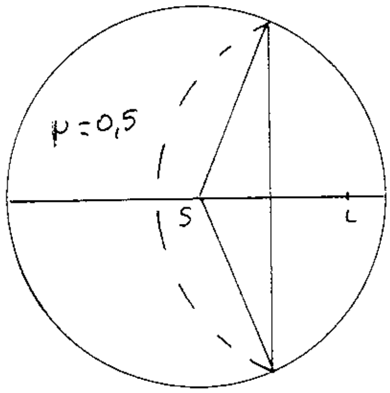
a) Equation donnant α :
On cherche α strictement compris entre 0 et π tel que $\mu = 0{,}5$
$\mu = 0{,}5$
équivaut à $1/2 = (1/\pi)(\alpha - \sin\alpha)$
équivaut à $\pi/2 = \alpha - \sin\alpha$
équivaut à $\alpha - \sin\alpha - \pi/2 = 0$
Le problème se ramène donc à résoudre pour x strictement compris entre 0 et π l'équation (E) : $x - \sin x - \pi/2 = 0$

b) Résolution de (E) dans $]0\,;\pi[$

On considère la fonction $f_\mu : [0\,;\pi] \to R$ définie par $f_\mu(x) = x - \sin x - \pi\mu$:
f_μ est dérivable sur $[0\,;\pi]$
et $f'_\mu(x) = 1 - \cos x$;
f'_μ est strictement positive sur $]0\,;\pi[$,

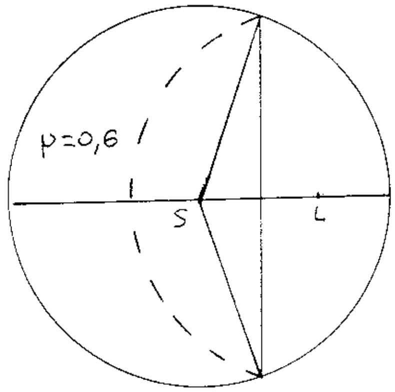
donc, f_μ réalise une bijection strictement croissante de $[0 ; \pi]$ sur $J = [f_\mu(0) ; f_\mu(\pi)] = [-\pi/2 ; \pi/2]$
0 est strictement compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ donc 0 a un unique antécédent α dans $]0 ; \pi[$.
L'équation (E) a donc une unique solution α dans $]0 ; \pi[$

Encadrement de α
(méthode par balayage après avoir programmé f_μ) :
$2{,}3 < \alpha < 2{,}4$ puis $2{,}309 < \alpha < 2{,}310$



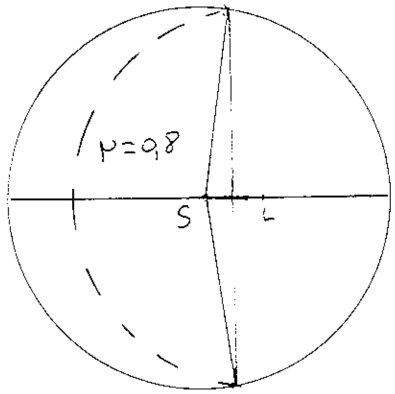
3) Recherche pour d'autres valeurs de μ
μ est un paramètre compris entre 0 et 1.

a) Equation donnant α
On cherche α strictement compris entre 0 et π tel que
$\mu = (1/\pi)\,(\alpha - \sin\alpha)$.
$\mu = (1/\pi)\,(\alpha - \sin\alpha)$ équivaut à $\pi\mu = \alpha - \sin\alpha$ ce qui équivaut à $\alpha - \sin\alpha - \pi\mu = 0$.
Le problème se ramène donc à résoudre dans $[0 ; \pi]$ l'équation (F) : $x - \sin x - \pi\mu = 0$.



(F) a une solution unique :
on introduit la fonction $f_\mu : [0 ; \pi] \to \mathbb{R}$
définie par $f_\mu(x) = x - \sin x - \pi\mu$:
f_μ est dérivable sur $[0 ; \pi]$ et $f'_\mu(x) = 1 - \cos x$;
f'_μ est strictement positive sur $]0 ; \pi[$,
f_μ réalise donc une bijection strictement croissante de $[0 ; \pi]$ sur $J = [f_\mu(0) ; f_\mu(\pi)] = [-\pi\mu ; \pi(1-\mu)]$
μ est strictement compris entre 0 et 1, donc $1 - \mu > 0$.
0 est strictement compris entre $-\pi\mu$ et $\pi(1-\mu)$ donc 0 a un unique antécédent α stritement compris entre 0 et π.

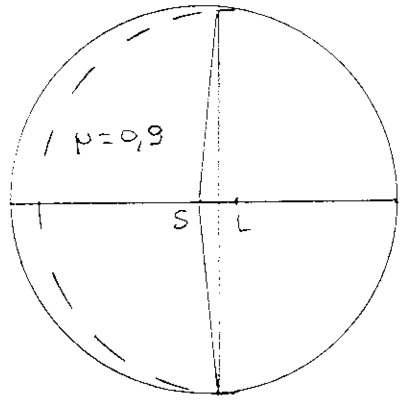
Pour chaque valeur de μ strictement comprise entre 0 et 1, (F) possède une unique solution α dans $]0 ; \pi[$



b) Valeur approchée de α pour différentes valeurs de μ.
On "ouvre" une mémoire pour μ, on programme f_μ.

μ	**α en radians**	**α en degrés**
0,5	2,310	132,35°
0,6	2,491	142,72°
0,8	2,825	161,26°
0,9	2,985	171,03°

4) Dessins correspondant à différentes valeurs de μ
(ci-contre)



5) Contrôle graphique

D_μ est la droite d'équation réduite $y = x - \pi\mu$. On a une famille de droites parallèles de coefficient directeur 1.

Pour chaque valeur de μ, la solution de l'équation (F) est l'abscisse du point d'intersection de D_μ avec le morceau de la courbe (C) représentant la fonction sinus sur $[0 ; \pi]$

Partie B

1) Relation entre g et α

$g = HK / R = 2HK / 2R$
Dans le triangle SAH rectangle en H on a :
$\cos(\alpha/2) = SH / SA = SH / R$.
H est un point du segment [SK]
Donc $SH + HK = SK = R$ d'où $HK = R - SH$
$HK = R - R\cos(\alpha/2) = R(1 - \cos(\alpha/2))$ et
$HK = gR$ donc $g = 1 - \cos(\alpha/2)$.

3) Fonction ϕ

Soit ϕ la fonction de [0 ; 1] dans [0 ; 1] définie par $\phi(g) = \mu$. On donne g srictement compris entre 0 et 1. Il existe un unique réel α tel que $\cos(\alpha/2) = 1 - g$. On lui associe alors le réel μ tel que $\mu = (1/\pi)(\alpha - \sin\alpha)$
Le tableau ci-contre donne, pour différentes valeurs de g, les valeurs de α en radians, α en degrés, puis μ.
La courbe (Γ) ci-dessous représente ϕ dans le plan muni d'un repère : elle est tracée point par point grâce au tableau de valeurs.

Remarque :
$$\mu = \frac{1}{\pi}\left[2Arc\cos(1-g) + 2(g-1)\sqrt{2g-g^2}\right]$$

g	(rad) α	(deg) α	μ	g	(rad) α	(deg) α	μ
0,02	0,401	23	0,003	0,52	2,14	122,6	0,413
0,04	0,568	32,5	0,01	0,54	2,186	125,2	0,436
0,06	0,696	39,9	0,017	0,56	2,23	127,8	0,458
0,08	0,805	46,1	0,027	0,58	2,275	130,3	0,481
0,1	0,902	51,7	0,037	0,6	2,319	132,8	0,505
0,12	0,99	56,7	0,049	0,62	2,362	135,3	0,528
0,14	1,071	61,4	0,062	0,64	2,405	137,8	0,552
0,16	1,147	65,7	0,075	0,66	2,448	140,2	0,576
0,18	1,219	69,8	0,089	0,68	2,49	142,7	0,6
0,2	1,287	73,7	0,104	0,7	2,532	145,1	0,624
0,22	1,352	77,5	0,12	0,72	2,574	147,5	0,648
0,24	1,415	81,1	0,136	0,74	2,616	149,9	0,673
0,26	1,475	84,5	0,153	0,76	2,657	152,2	0,697
0,28	1,534	87,9	0,17	0,78	2,698	154,6	0,722
0,3	1,591	91,1	0,188	0,8	2,739	156,9	0,747
0,32	1,646	94,3	0,207	0,82	2,78	159,3	0,772
0,34	1,7	97,4	0,225	0,84	2,82	161,6	0,797
0,36	1,753	100,4	0,245	0,86	2,861	163,9	0,822
0,38	1,804	103,4	0,265	0,88	2,901	166,2	0,848
0,4	1,855	106,3	0,285	0,9	2,941	168,5	0,873
0,42	1,904	109,1	0,305	0,92	2,981	170,8	0,898
0,44	1,953	11,9	0,326	0,94	3,022	173,1	0,924
0,46	2,001	114,6	0,348	0,96	3,062	175,4	0,949
0,48	2,048	117	0,369	0,98	3,102	177,7	0,975
0,5	2,094	120	0,391	1	3,142	180	1

■