



Les lois de Kepler en TS

Marie-Agnès Lahellec

Ce travail m'a été inspiré par la lecture d'un des chapitres du livre d'André Brahic "Les enfants du Soleil". Dans les "fausses piste", la règle de Titius Bode est mentionnée avec tellement d'humour que je voulais en faire profiter mes élèves.

C'est la première séance de T.P. de l'année, en septembre.

Les objectifs de ce T.P. sont de travailler concrètement sur les lois de Kepler en "tâtant" vraiment de l'ellipse, d'aborder l'histoire de la découverte des planètes et d'introduire la loi de Newton sur la gravitation.

Un objectif sous-jacent est de faire comprendre aux élèves, sur un exemple, qu'en physique une loi ne souffre pas d'exception et que l'erreur a un véritable statut dans la recherche scientifique, sans connotation négative.

Pour être honnête il y a aussi une idée de recentrage des maths sur nos besoins en physique.

Le travail proposé aux élèves comprend trois parties et s'étale sur trois semaines.

1. Travail à la maison, sur feuille, préparant la séance de T.P. sur ordinateur avec un tableur.
2. Séance de T.P. avec remise du travail à la fin de la séance.
3. Exercices sur feuille, à la maison.

Au moment du cours sur la gravitation, je reviendrai sur l'histoire de la découverte des planètes puisque cela fait intervenir la règle de Titius Bode mais aussi la loi de Newton.

Préparation du T.P. : Les trois lois de Kepler

Ce sont des lois empiriques concernant les trajectoires des planètes autour du Soleil.

Première loi (1605).

Dans le référentiel héliocentrique, la trajectoire (orbite) du centre de chaque planète est une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers.

Remarque : il n'y a pas d'astre à l'emplacement de l'autre foyer.

Un peu de mathématiques : définition bifocale. Géométriquement une ellipse est définissable par ses deux foyers F et F' (points fixes) et par une constante qui est une longueur supérieure ou égale à FF' . L'appartenance d'un point M à l'ellipse est alors caractérisée par la relation :

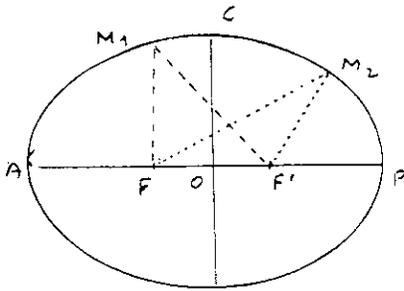
$$FM + F'M = \text{Constante}$$

On pose $FM + F'M = 2a$ et $FF' = 2c$

On définit l'excentricité e de l'ellipse :

$$e = \frac{c}{a}$$

T.P. : les lois de Kepler



$$FM_1 + F'M_1 = FM_2 + F'M_2$$

Exercice :

- Montrer que le grand axe AP a pour longueur $2a$.
- On peut tracer une ellipse avec une ficelle, de longueur $2a$, deux punaises fixées en F et F' et un crayon qui coulisse en M dans la ficelle.

Tracer par cette méthode une ellipse d'excentricité $e = 0,5$.
Tracer le cercle de diamètre [AP] pour l'ellipse tracée.
Si l'on considère ce cercle comme une ellipse dégénérée, quelle est son excentricité ?

Question :

En astronomie les points A et P s'appellent respectivement "aphélie et périhélie" en supposant le soleil en F'. Chercher l'étymologie de ces mots. Justifier leur emploi en astronomie.

Deuxième loi (1604)

Le mouvement de chaque planète P est tel que, pendant des durées égales, les aires balayées par le segment [SP] reliant le Soleil à la planète (rayon vecteur) soient égales.

Exercice d'application :

Montrer que si la trajectoire d'une planète est un cercle centré sur le Soleil, son mouvement est uniforme.
Montrer que si la trajectoire est une ellipse dont un des foyers est le Soleil, le mouvement n'est pas uniforme.
Quelle est la partie de trajectoire où la vitesse est la plus grande ?

Troisième loi (1618)

Le carré de la période de révolution T d'une planète P autour du Soleil est proportionnelle au cube du demi grand axe a.

Exercice d'application :

Si l'on trace la courbe T en fonction de a pour les planètes du système solaire est ce que l'on obtient une droite ? Justifier la réponse.

Histoire des sciences

Kepler a trouvé les lois grâce à l'observation de Mars.
Quelles étaient les planètes connues à son époque ?
Trouver les dates de découvertes des autres planètes et éventuellement l'histoire de leur découverte.
Qu'appelle-t-on "ceinture d'astéroïdes" ?

Objectif : exploiter les données concernant les planètes du système solaire.

Données :

Planète	Demi-grand axe a (ua)	Période T (années)	Excentricité e
Mercure	0,387	0,241	0,206
Vénus	0,723	0,615	0,007
Terre	1	1	0,017
Mars	1,524	1,881	0,093
Jupiter	5,205	11,862	0,048
Saturne	9,576	29,458	0,056
Uranus	19,281	84,015	0,047
Neptune	30,142	164,788	0,010
Pluton	39,881	247,7	0,250

La distance entre la Terre et le Soleil définit l'unité astronomique (ua) : $1 \text{ ua} = 1,5 \times 10^8 \text{ km}$.

Exploitation :

1 - Au milieu du 18^e siècle deux allemands Titius et Bode (un mathématicien et un astronome) énoncent une sorte de "loi de série" pour trouver la succession des valeurs des demi grands axes des planètes en unité astronomique.

Règle : on prend les nombres 0 ; 3 ; 6 ; 12 ; 24 etc. ... on ajoute à chacun 4 et on divise par 10.

a) Est ce que cette règle convient bien, pour toutes les planètes ? Montrer qu'il semble "manquer" une planète entre Mars et Jupiter.

b) En appliquant cette règle empirique dite de "Titius - Bode" trouver le demi grand axe de la planète "manquante".

2 - Quelle est la planète dont la trajectoire est presque circulaire ? Justifier la réponse.

Quelle est celle dont la trajectoire est la plus excentrique ? Justifier la réponse.

Le document fourni est celui de la trajectoire de Mercure, tracer sur le document la trajectoire de la Terre.

3 - Pour Mars, calculer en ua la demi longueur du petit axe de l'ellipse : $b = a\sqrt{1-e^2}$

4 - Utilisation du logiciel Excel.

Faire tracer la courbe représentant T en fonction de a. Peut on deviner l'équation de la courbe ?

Demander la courbe de tendance "puissance" en demandant en option l'affichage de l'équation de la courbe.

Montrer que le résultat satisfait à la troisième loi de Kepler. Utiliser le logiciel pour tracer une courbe linéaire mettant en évidence la troisième loi de Kepler.

(Tracer en fait trois courbes en regroupant les planètes trois par trois ; cf. question 4 de l'exercice sur feuille).

Confirmer par le calcul.

5 - En appliquant la règle de "Titius - Bode" et la troisième loi de Kepler, déterminer quelle serait la période de révolution de la "planète manquante" trouvée.

Exercice sur feuille à partir des données du T.P.

1- Kepler aurait-il pu trouver les deux premières lois en observant Vénus ?

2 - Kepler aurait-il pu trouver les deux premières lois en observant Mercure ?

L'observation de Mercure est très difficile ; pourquoi ?

3 - Exprimer la troisième loi de Kepler en prenant comme unité de longueur le mètre au lieu de l'unité astronomique et comme unité de temps la seconde au lieu de l'année. Faire la comparaison avec l'expression de la loi obtenue en T.P.

4 - Pour vérifier la troisième loi de Kepler on a l'idée de tracer la courbe représentant T^2 en fonction de a .

a) On rencontre une difficulté d'échelle. Expliquer.

b) Pour lever cette difficulté, tracer la courbe représentant $\text{Log } T$ en fonction de $\text{Log } a$.

c) Commenter le graphique obtenu. Montrer qu'il permet effectivement de vérifier la troisième loi de Kepler.

Premiers commentaires

1 - Travail à la maison

- Tracer une ellipse avec une ficelle : la honte !

- Les élèves sont allés voir le professeur de maths qui leur a donné la méthode des cercles ...

- Cela ne les a pas empêchés de faire un tracé approximatif, ce qui les gêne pour répondre à des questions abordant la géométrie de la figure.

- Montrer que le demi grand axe a pour longueur $2a$ leur a posé beaucoup de problème : aucun n'a invoqué de motif de symétrie.

- Les questions sur la deuxième loi étaient difficiles car les élèves ne raisonnent pas spontanément sur un schéma.

- J'ai été surprise que des élèves de T.S. répondent que la courbe représentant T en fonction de a est une droite après l'énoncé de la troisième loi de Kepler. Mais ils ont été contents ensuite, en T.P., de voir leur "erreur".

- En histoire des sciences j'ai eu évidemment des extraits d'encyclopédie, sur lesquels je reviendrai en cours.

2 - Séance de T.P.

Pour cause de réorganisation du labo, la séance a eu lieu classe entière, les élèves travaillant en petits groupes, sur les documents que j'avais préparés et que je leur distribuais au fur et à mesure.

La règle de Titius-Bode les a bien intéressés, la démarche de comparaison n'est pas évidente malgré le plan des questions posées. Il faut appliquer la règle puis confronter avec les données.

La difficulté d'échelle pour tracer les courbes leur apparaît évidente. Certains se souvenaient de l'échelle logarithmique utilisée pour le niveau sonore en seconde, ce qui m'a donné l'idée de la question 4 de l'exercice sur feuille après le T.P.

La trajectoire de Mercure est fournie. Attention, il faut effacer la trajectoire de la Terre pour le document élève.

Les élèves doivent trouver le facteur d'échelle : 10 cm pour 1 ua, et penser à dessiner un cercle centré sur le Soleil et non sur le centre de l'ellipse.

3 - Exercice sur feuille

1) La trajectoire de Vénus est presque circulaire.

2) Mercure a bien une trajectoire elliptique mais est très proche du Soleil, la planète est très difficile à observer car on est aveuglé par la lumière du Soleil.

3) Dans le T.P. nous avons des unités commodes qui nous permettraient d'aboutir à $T^2 = 1 \times a^3$ où le 1 a pour unité (année)² ua⁻³. En prenant pour unités la seconde et le mètre (système SI), il vient : $T^2 = 2,9 \times 10^{-19} a^3$.

4) La fonction Log vient d'être montrée pour la chimie. On obtient $\text{Log } T = (3 / 2) \text{Log } a$.

Annexe 1 (document professeur)

Application de la règle de Titius-Bode et comparaison

	Titius-Bode	Planète	a	% écart
0	0,4	Mercure	0,387	3,4
3	0,7	Vénus	0,723	-3,2
6	1	Terre	1	0,0
12	1,6	Mars	1,524	5,0
24	2,8			
48	5,2	Jupiter	5,205	-0,1
96	10	Saturne	9,576	4,43
192	19,6	Uranus	19,281	1,65
		Neptune	30,142	
384	38,8	Pluton	39,881	-2,71

Calculs utiles

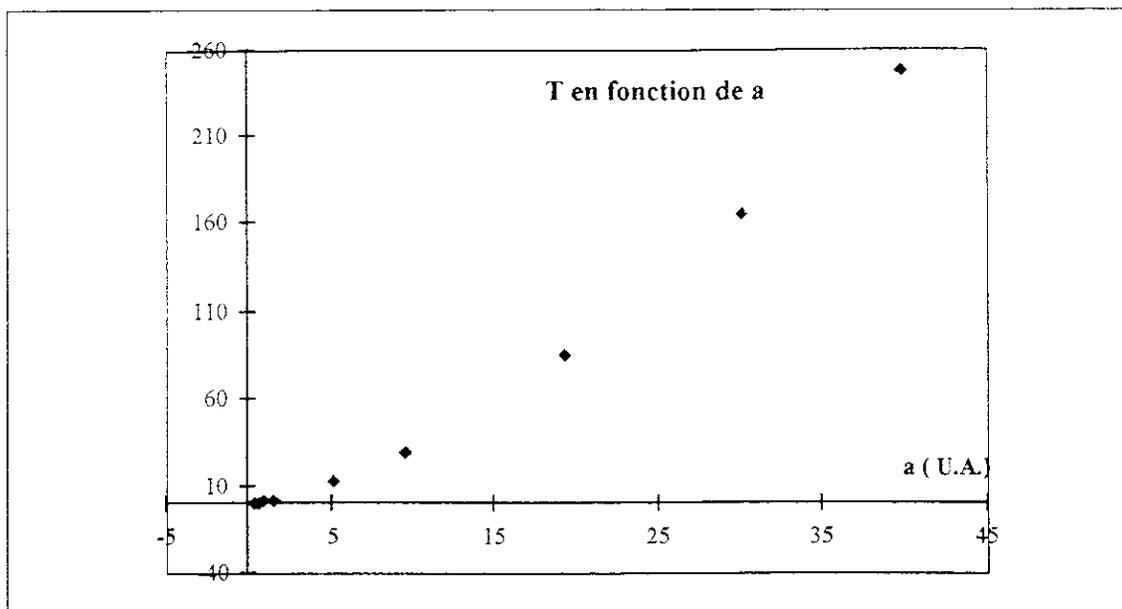
Planète	a (ua)	T (années)	e	b (ua)	c (ua)
Mercure	0,387	0,241	0,206	0,379	0,080
Vénus	0,723	0,615	0,007	0,723	0,005
Terre	1	1	0,017	1,000	0,017
Mars	1,524	1,881	0,093	1,517	0,142
Jupiter	5,205	11,862	0,048	5,199	0,250
Saturne	9,576	29,458	0,056	9,561	0,536
Uranus	19,281	84,015	0,047	19,260	0,906
Neptune	30,142	164,788	0,01	30,140	0,301
Pluton	39,881	247,7	0,25	38,615	9,970

Annexe 2 (document professeur)

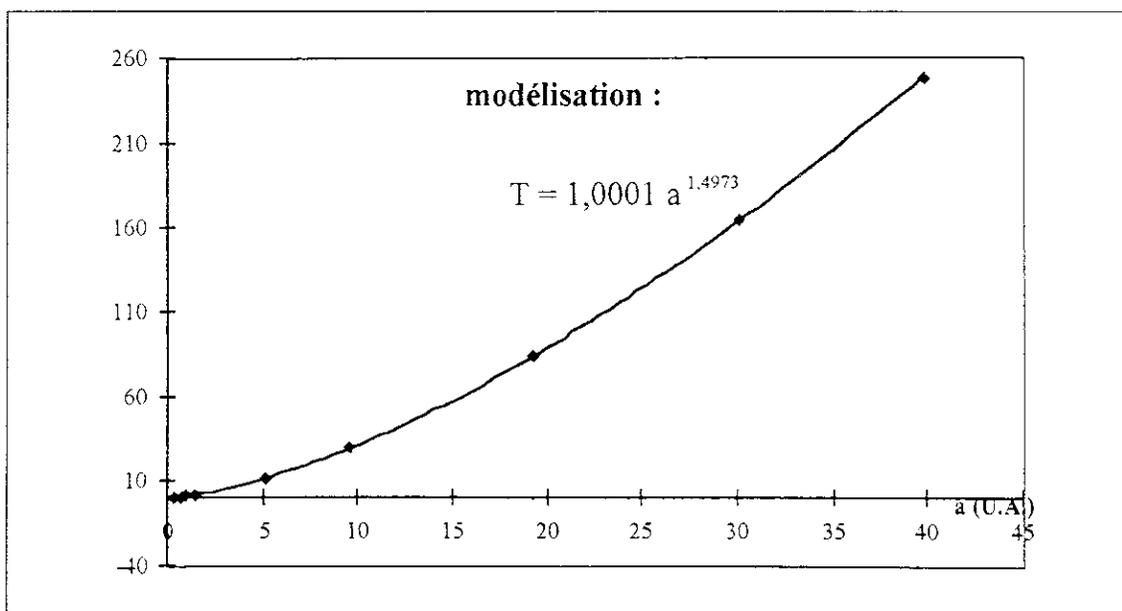
Calcul du rapport a^3 / T^2

Planète	Demi-grand axe a (ua)	Période T (années)	Excentricité e	a cube	T carré	rapport
Mercure	0,387	0,241	0,206	0,057961	0,058	0,998
Vénus	0,723	0,615	0,007	0,377933	0,378	0,999
Terre	1	1	0,017	1	1	1
Mars	1,524	1,881	0,093	3,539606	3,538	1
Jupiter	5,205	11,862	0,048	141,01040	140,71	1,002
Saturne	9,576	29,458	0,056	878,1171	867,77	1,012
Uranus	19,281	84,015	0,047	7167,846	7058,5	1,015
Neptune	30,142	164,788	0,01	27385,22	27155	1,008
Pluton	39,881	247,7	0,25	63430,50	61355	1,034

Courbe T en fonction de a : on ne peut trouver d'emblée son équation



Modélisation obtenue



Annexe 3 (document professeur) : trajectoires de Mercure et de la Terre

Le document élève comporte seulement la trajectoire de Mercure et l'élève doit tracer la trajectoire de la Terre.

