

Rétrogradation du Soleil dans le ciel de Mercure

Michel Van Haute

Lors de la préparation d'un groupe de travail sur la durée du jour mercurien (un jour mercurien vaut deux années mercuriennes), une courbe dessinée dans Le grand atlas de l'astronomie Universalis (p. 64) m'avait intrigué. Elle représente la trajectoire apparente du Soleil dans le ciel de Mercure. On y constate, lorsque Mercure est proche de son périhélie, une rétrogradation du Soleil (cf. figure 1). C'est ce point que je me propose d'éclaircir.

Insuffisance de l'approximation circulaire

En raisonnant avec un mouvement circulaire uniforme, le phénomène ne peut bien sûr pas être détecté. La durée de révolution sidérale de Mercure est d'environ 88 j et sa durée de rotation sidérale d'environ 58,6 j. Avec les notations de la fig.2, les angles ϕ et α correspondant à une durée de 1 j valent environ : $\phi = 4^\circ$ et $\alpha = 6,1^\circ$.

Pour un observateur sur Mercure, le soleil se déplacerait alors de manière uniforme dans le ciel de la planète.

Utilisation des lois de Kepler.

D'après la loi des aires, pour une même durée (ici 1 jour, par exemple), l'angle $P_1 S Q_1$ est supérieur à l'angle $P_2 S Q_2$ et est maximal lorsque P_1 et Q_1 sont proches du

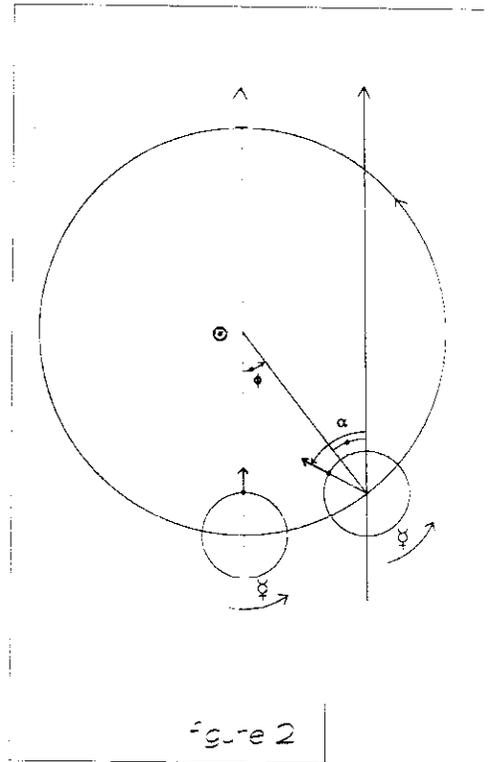


figure 2

périhélie (fig.3). Avec des notations similaires à celles de la fig.2, l'angle α reste inchangé mais l'angle ϕ varie avec la position de Mercure sur son orbite. On constatera une rétrogradation si ϕ devient supérieur à α .

On cherche alors à déterminer l'angle ϕ_1 correspondant à P_1, Q_1 , P_1 périhélie de Mercure et Q_1 correspondant à la position de Mercure un jour après la position P_1

Rappelons l'équation polaire de l'ellipse (pôle au foyer) :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

(périhélie pour $\theta = 0$)

avec $p = e \delta = e \left(\frac{a^2}{c} - c \right) = e \left(\frac{a^2}{ae} - ae \right) = a(1 - e^2)$ (fig.4).

L'aire balayée entre les positions M_0 et M_1 vaut donc :

$$A(M_0, M_1) = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta$$

d'où, pour P_1 et Q_1 , en posant $q = 2 \operatorname{Arctan} u$

$$\begin{aligned} A(P_1, Q_1) &= p^2 \int_0^{\tan \frac{\phi_1}{2}} \frac{1 + u^2}{[1 + u^2 + e(1 - u^2)]^2} du \\ &= \frac{p^2}{1 - e^2} \int_0^{\tan \frac{\phi_1}{2}} \frac{1}{1 + \frac{1 - e}{1 + e} u^2} du - \frac{2ep^2}{(1 - e)(1 + e)^2} \int_0^{\tan \frac{\phi_1}{2}} \frac{1}{(1 + \frac{1 - e}{1 + e} u^2)^2} du \end{aligned}$$

La seconde intégrale se calcule par parties et on obtient, compte-tenu de la valeur de p :

$$A(P_1, Q_1) = a^2 \sqrt{1 - e^2} \left[\operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\phi_1}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1 - e^2} \tan \frac{\phi_1}{2}}{1 + e + (1 - e) \tan^2 \frac{\phi_1}{2}} \right]$$

Par ailleurs, cette aire vaut : $\frac{\pi ab}{88} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{88}$ (deuxième loi de Kepler).

L'angle ϕ_1 cherché est donc solution de l'équation :

$$\operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\phi_1}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1 - e^2} \tan \frac{\phi_1}{2}}{1 + e + (1 - e) \tan^2 \frac{\phi_1}{2}} = \frac{\pi}{88}$$

Remarquons, ce qui était prévisible, que seul le paramètre e intervient dans cette équation. L'orbite de Mercure a pour excentricité $e = 0,206$.

La résolution numérique de cette équation (à l'aide d'une calculatrice, en l'occurrence une TI 92) fournit :

$\phi_1 = 6,35^\circ$, valeur effectivement supérieure à $\alpha = 6,1^\circ$.

Reste à aller constater sur place (chaudement) cette rétrogradation !!

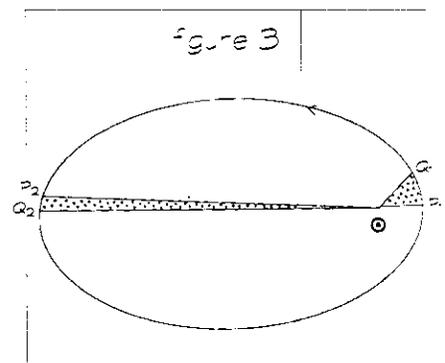


figure 4

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad e = \frac{c}{a}$$

$OA = BF = c$ cet grand axe

$OB = b$ cet petit axe

$OF = c$ cet distance focale

$OK = \frac{c^2}{a}$ cet distance des directrices

$FD = a$ cet corde focale ou paramètre

