Le cadran solaire de Freeman

(3, suite et fin)

Paul Perbost (Nice)

9. Précision du cadran

La graduation de l'échelle horaire est établie à partir de la relation

$$S\Delta = l \cos\delta \sin H$$

qui exprime théoriquement l'abscisse de ce point Δ que nous avons appelé "le carrefour de l'heure". Toute erreur la position de Δ entraîne évidemment une incertitude sur l'heure. D'ailleurs, malgré une lecture correcte de la situation de Δ à une date déterminée, d'inévitables imperfections dans la réalisation de l'instrument (courbure du gnomon, etc..) peuvent l'écarter plus ou moins du lieu que lui assigne la théorie.
Pour tester la fiabilité du cadran, il suffit de comparer ses indications à celle d'une horloge préalablement réglée sur le temps solaire vrai local, au jour et au lieu de l'observation, compte tenu de l'équation du temps et de la longitude.
Lorsque Δ à ne tombe pas exactement sur l'une des lignes horaires tracées, on ne peut estimer l'heure qu'en interpolant à vue et au mieux sa position entre les graduations qui l'encadrent au plus près. D'où une incertitude due essentiellement à ce que l'on nomme parfois "l'équation personnelle". Entre midi et 4 h (p.m.), l'estimation peut se faire à moins de 3 min près ; mais lorsque l'on s'approche de 6 h, elle devient progressivement plus imprécise, en raison de l'extrême resserrement graduel des lignes horaires dans cette ultime partie de l'échelle. On doit donc s'attendre à une erreur importante à cet endroit.
D'autre part, vers le lever et le coucher du Soleil, le terminateur de l'ombre du gnomon est si près de G (cf. fig.8) qu'il se trouve masqué par son bord incurvé. On est alors contraint de confondre ces deux points, pratiquement indiscernables, ce qui constitue évidemment une nouvelle cause d'erreur. En pareilles circonstances, c'est le cas de bien d'autres cadrans.

Une étude mathématique peut donner une idée de l'erreur maximale possible au voisinage de 6 h. Posons $S\Delta = X$ et différentions par rapport à H. Ainsi :

$$dX = l \cos\delta \cos H \, dH \quad \text{d'où} \quad dH = \frac{dX}{l \cos\delta \sin(90° - H)} \quad (H \neq 0)$$

Un voisinage de 6h, où H = 90°, peut être défini par $\alpha = 90° - H$. Et pour que ce voisinage ait une faible ampleur, à proximité de 6h, prenons par exemple le petit angle $\alpha = 1°$, par raison de simplicité. Majorons ensuite dH en donnant à δ sa valeur maximale et rappelons que dans les conditions fixées :

$\sin\alpha = \alpha(\text{rd})$ et que $1° = \dfrac{\Pi}{180}$ (rd)

Prenons $l = 130$ mm et admettons $dX = 1$ mm, ce qui ne représente que 0,75% de l. Ce choix de dX n'a rien d'aberrant, à cause des imperfections évoquées ci-dessus, de la pénombre, de la réfraction à l'horizon, etc.

$$\text{Finalement, } dH = \frac{dX}{l \cos \varepsilon \sin \alpha} = \frac{1}{130 \cos \varepsilon (\pi/180)}$$

(avec $\varepsilon = \delta_{max} = 23°27'$) On trouve ainsi $dH = 0{,}48$ h = 28 min 49 s. L'incertitude est donc de l'ordre d'une demi-heure,. Dans les conditions considérées, c'est énorme. Heureusement, entre midi et 4 h, elle s'abaisse à 2 min, ce qui réhabilite malgré tout les qualités scientifiques du cadran à un niveau acceptable pour une bonne partie de la journée.

10. La ronde des heures

Toute ligne horaire croise l'échelle des heures en un point t indexé par deux nombres différents rangés sur deux listes parallèles au bas de la table (F), correspondant aux heures rondes (sauf cependant 6 h a.m. et 6 h p.m. qui ne sont pas redoublées) (fig.3). Lors d'une observation, il y a évidemment lieu de savoir lequel prendre. Cela dépend, on va le voir, des signes respectifs de ϕ et de δ.

• 1 er cas : φ et δ ont des signes différents.

Cela se produit dans l'hémisphère Nord ($\phi > 0$) pendant les saisons d'automne et d'hiver ($\delta < 0$),ou dans l'hémisphère Sud ($\phi < 0$) au printemps et en été ($\delta > 0$).

Or, l'angle horaire $H_{\odot}$ du Soleil au coucher est donné par la formule

$$\cos H_{\odot} = - \operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \delta$$

$H_{\odot}$ exprime l'arc semi-diurne du Soleil, abstraction faite de la réfraction. c'est à dire l'un des arcs égaux qu'il décrit entre le méridien et l'horizon, au lieu et à la date envisagés. On en déduit la durée du jour. La formule s'applique d'ailleurs aux valeurs de ϕ et de δ, quels que soient leurs signes respectifs.
Ainsi, dans le cas examiné, φ et δ ayant des signes différents, le cosinus de $H_{\odot}$ est positif. On a donc, en degrés $-90° \leq H_{\odot} < +90°$, soit en heures 6h a.m. $\leq H_{\odot} <$ 6 h p.m. Dans ce cas, il n'y a aucune difficulté à choisir sur l'échelle horaire le nombre qui convient : il se trouve dans la rangée supérieure de E_H. Nommons cette rangée E_1. Par la suite, l'autre rangée sera désignée par E_2.

• 2 ème cas et ϕ et δ ont le même signe

a) Une partition

Nous allons montrer que dans le cas général, à quelques exceptions près, il suffit de repérer la position (I') du terminateur de l'ombre du gnomon relativement à un diagramme dessiné sur la surface de la table mobile, pour savoir à laquelle des deux rangées, E_1 ou E_2, il faut se référer. Ce diagramme comporte sept régions juxtaposées qui réalisent une partition du dessin (fig.9). Un disque circulaire (C) de centre 0 et de rayon $R = 1 \cos \varepsilon$ (ε = 23° 27') en constitue la région centrale. Trois portions de parallèles à mn, équidistantes entre elles y délimitent les autres régions, comme le montre la figure. La droite médiane cc, passe par 0, tandis que les bords aa et bb tournés respectivement vers le Sud et le Nord sont distants du centre d'une longueur égale à $1 \sin \varepsilon$.

b) Un calcul

En nous bornant aux heures rondes p.m., ce qui ne diminue pas la généralité de la discussion, soulignons que le signe de cos H indique la graduation horaire à choisir.

En effet :

$$\cos H > 0 \Leftrightarrow 0 \leq t < 6,\ (E_1)$$
$$\cos H > 0 \Leftrightarrow 6 < t \leq 12,\ (E_2)$$

Ainsi, nous montrerons que si le terminateur l' de l'ombre du gnomon est intérieur à la zone circulaire, c'est à l'échelle (E_1) qu'il faut se référer. Le reste du diagramme indique les échelles de référence, de la même façon.

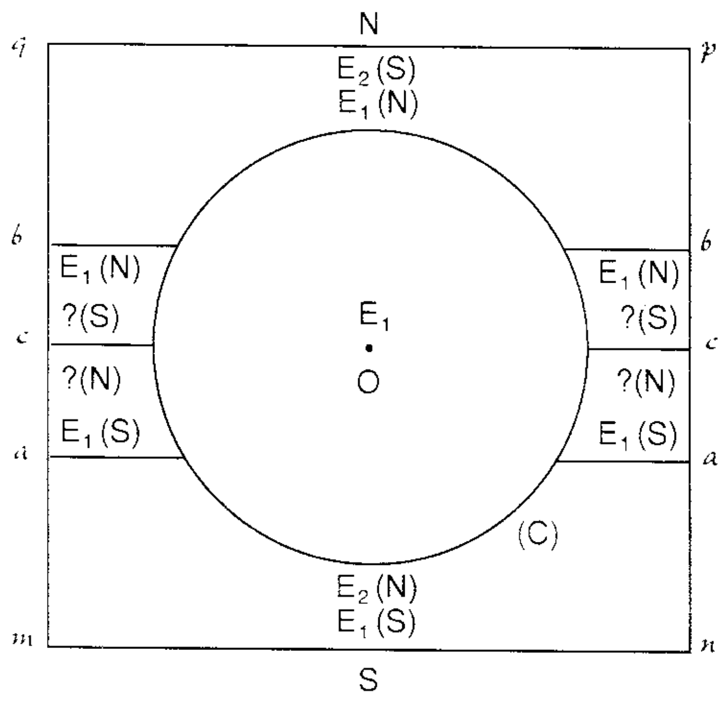


fig. 9

Étude du signe de cos H

Transcrivons deux formules déjà indiquées à propos du triangle de position

$$\sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H \quad \mathbf{(1)}$$

$$\sin \delta = \sin \phi \sin h - \cos \phi \cos \delta \cos a \quad \mathbf{(2)}$$

En éliminant sin h entre ces deux équations, on obtient

$$\cos \phi \cos h \cos a = -\sin \delta \cos^2 \phi + \sin \phi \cos \phi \cos \delta \cos H$$

soit, après simplification (sous condition que $\cos \phi \neq 0$, donc pôles terrestres exclus)

$$\sin \delta \cos \phi = \sin \phi \cos \delta \cos H - \cos h \cos a \quad \mathbf{(3)}$$

Discussion : nous la conduirons en considérant d'abord le cas où le terminateur est intérieur au cercle (C), ensuite le cas où il lui est extérieur.

1°. Le terminateur est intérieur au cercle

Alors, $OI' < 1 \cos \varepsilon$, d'où il résulte que $1 \cos h < 1 \cos \varepsilon$ et par conséquent $h > \varepsilon$

D'où, d'après **(1)** :

$$\begin{aligned} \cos \phi \cos \delta \cos H = \sin h - \sin \phi \sin \delta &> \sin \varepsilon - \sin \phi \sin \delta \\ &\geq \sin \delta(1-\sin \phi) > 0 \quad \text{si } \delta > 0 \\ &\geq \sin (-\delta)\,(1+\sin \phi) > 0 \quad (\text{car } -\varepsilon \leq \delta \leq +\varepsilon) \end{aligned}$$

De là on déduit que $\cos H > 0$. Ainsi, lorsque le terminateur I' est intérieur au cercle (C), c'est sur la liste E_1 de la graduation horaire qu'il faut prendre le nombre qui indique l'heure, quelle que soit la latitude. Telle est la raison de l'indication E_1 à l'intérieur du cercle.

2°. Le terminateur est extérieur au cercle

Supposons que ce point soit au Sud de la ligne médiane (fig.9). Alors, d'après **(3)**

$$\sin \delta \cos \phi - \sin \phi \cos \delta \cos H = \underline{-\cos h \cos a > 0}$$

En effet, puisque la direction de l'ombre est opposée à celle du Soleil, l'azimut de l'astre, dans les conditions supposées, est un angle obtus donc $\cos a < 0$. Des relations précédentes on déduit que

$$\sin \phi \cos \delta \cos H < \sin \delta \cos \phi$$

Rappelons que nous ne considérons ici que les cas où ϕ et δ ont les mêmes signes. Dès lors, deux situations distinctes doivent être envisagées. Notons-les **(I)** et **(II)**.

(I) $\phi < 0$ et $\delta < 0$ Alors, selon l'inégalité ci-dessus $\cos H > \operatorname{tg} \delta \operatorname{cotg} \phi > 0$ donc $\cos H > 0$ d'où l'indication $E_1(S)$ dans les trois zones extérieures à (C), sous la médiane cc.

(II) $\phi > 0$ et $\delta > 0$ Alors, $\cos H < \operatorname{tg} \delta \operatorname{cotg} \phi$ qui est un produit positif. Mais le fait que cos H soit inférieur à un nombre positif ne suffit pas à préciser son signe.

L'indétermination, dans ce cas singulier, est mentionnée interrogativement ?(N). Nous en reparlerons.

Cependant si, en outre, le terminateur se trouve au Sud de aa, alors

$$OI' = 1 \cos h > 1 \sin \varepsilon$$

donc	$-\cos h \cos a > \sin \varepsilon$ (car $\cos a < 0$)
d'où	$\sin \delta \cos \phi - \sin \phi \cos \delta \cos H > \sin \varepsilon$
puis	$\sin \varphi \cos \delta \cos H < \sin \delta \cos \phi - \sin \varepsilon$
ainsi	$\sin \varphi \cos \delta \cos H \leq \sin \varepsilon (\cos \varphi - 1)$ donc $\underline{\cos H < 0}$

Cela justifie l'indication E_2(N) dans la zone concernée.

Par raison de symétrie, les indications inscrites dans les zones extérieures à (C), au Nord de la médiane cc sont systématiquement la réplique de celles qu'on vient de justifier en détail. L'étiquetage de l'ensemble du diagramme en résulte, par de simples échanges.

Le cas réservé. Il est noté ?(N) ou ?(S). Il correspond au fait qu'en tout point de la zone tropicale, le Soleil passe deux fois par an au zénith à midi vrai, lorsque δ est égal à ϕ. A midi, ces jours-là, un mât vertical ne porte pas d'ombre. Entre ces deux dates, l'ombre méridienne est dirigée vers le Sud et elle tourne dans le sens trigonométrique. Aux autres époques de l'année, elle est dirigée vers le Nord et elle tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. En l'absence d'information précise sur $\phi - \delta$, on ne peut donc pas lever l'indétermination qui résulte de ce renversement local des ombres méridiennes. Le choix correspondant de E_1 ou de E_2 ne peut donc être examiné qu'au cas par cas.

En résumé :

• Si le terminateur est intérieur à (C), la graduation E_1 de l'échelle horaire est celle qu'il faut prendre en compte en toute latitude.

• Si le terminateur est extérieur à (C) et au Sud de aa, la lecture de l'heure se fait sur E_2 ou sur E_1, selon que $\phi > O$ ou que $\phi < O$.

• Si le terminateur est extérieur à (C) et au Nord de bb, la lecture de l'heure se fait E_2 ou sur E_1 selon que $\phi < 0$ ou que $\phi > O$.

• Si le terminateur est extérieur à (C), entre cc et aa, l'échelle à prendre est E_1, si $\phi < O$. Cependant, dans cette zone, il y a indétermination sur l'échelle à choisir si $\phi > O$.

• Si le terminateur est extérieur à (C), entre cc et bb, il faut choisir E_1 si $\phi > O$. Mais, dans cette partie, il y a indétermination sur l'échelle si $\phi < O$.

11. Conclusion

Le cadran solaire qui vient d'être décrit n'est pas un instrument de la science-fiction, du moins sur le plan théorique. Cependant, à l'évidence, c'est plutôt une curiosité scientifique qu'un instrument d'usage pratique. La complexité de l'agencement de ses multiples composantes, mobiles ou fixes, en limite naturellement la précision. D'ailleurs, le moindre écart de la ligne Nord-Sud avec la méridienne le fausserait : une boussole n'y changerait rien, ne serait-ce qu'en raison de la déclinaison magnétique. De même, il faudrait en régler soigneusement l'horizontalité avec de bons niveaux à bulle. Enfin, la superposition du diagramme indicateur des échelles horaires et du réseau des parallèles indicatrices des coordonnées horizontales sur la table mobile ne facilite guère les lectures.

(Par souci de simplicité, ce diagramme n'est pas représenté sur l'esquisse du cadran, fig.1).
Cependant, son originalité mérite une certaine considération. Les pages qui précèdent la lui ont accordée : c'était leur seul objet.

12. Dimensions pratiques du cadran (cf fig.4)

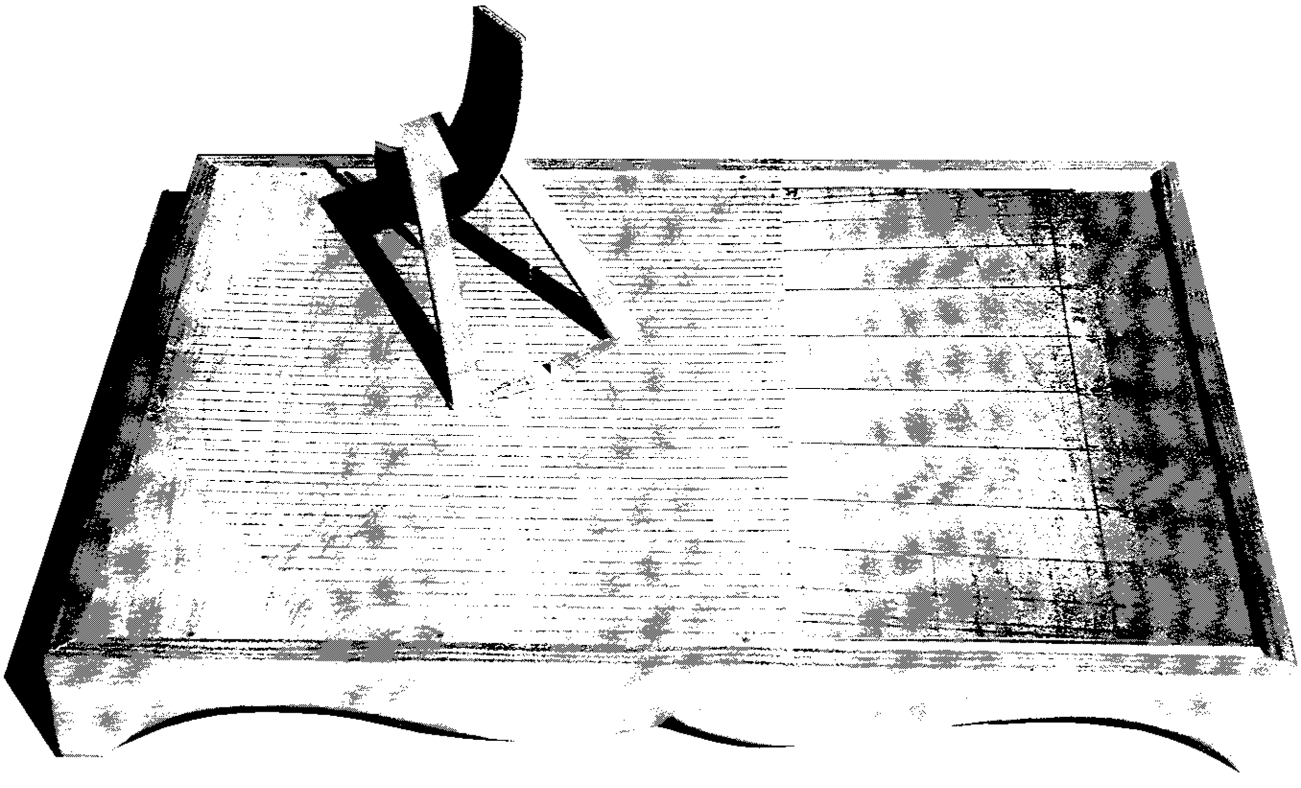
Ces dimensions, exprimées en mm, sont données à titre indicatif.

(m) 28Ox280 (petite table, mobile)
(F) 28Ox450 (grande table, fixe)
l = 130 (hauteur du gnomon
d = l = 130 (largeur de E_δ)
e = 0,5 (épaisseur du gnomon)
E_H = 260 (largeur de E_H)

N.D.L.R. - Paul Perbost a fait réaliser le cadran que présente la fig.10, une belle réalisation technique due à Pierre Laurenti, instituteur, qui, nous dit Paul Perbost, "est intelligent jusqu'au bout des doigts". (Photo Guy, à Nice, avril 1997)

13. Bibliographie

Freeman (cf. le titre inscrit au-dessus de la fig.1)
A.Danion : Astronomie Générale (Gauthier-Villars, 1952)
A.Danjon : Cosmographie (Hatier, 1948)
G.Cagnac : Mathématiques spéciales (Masson 1950)
C.N.R.S. : Les Cadrans solaires de Paris (Gotteland et Camus)



Courbe extraite de "Cadrans solaires de Paris"

CNRS Editions - Andrée Gotteland et Georges Camus 1993

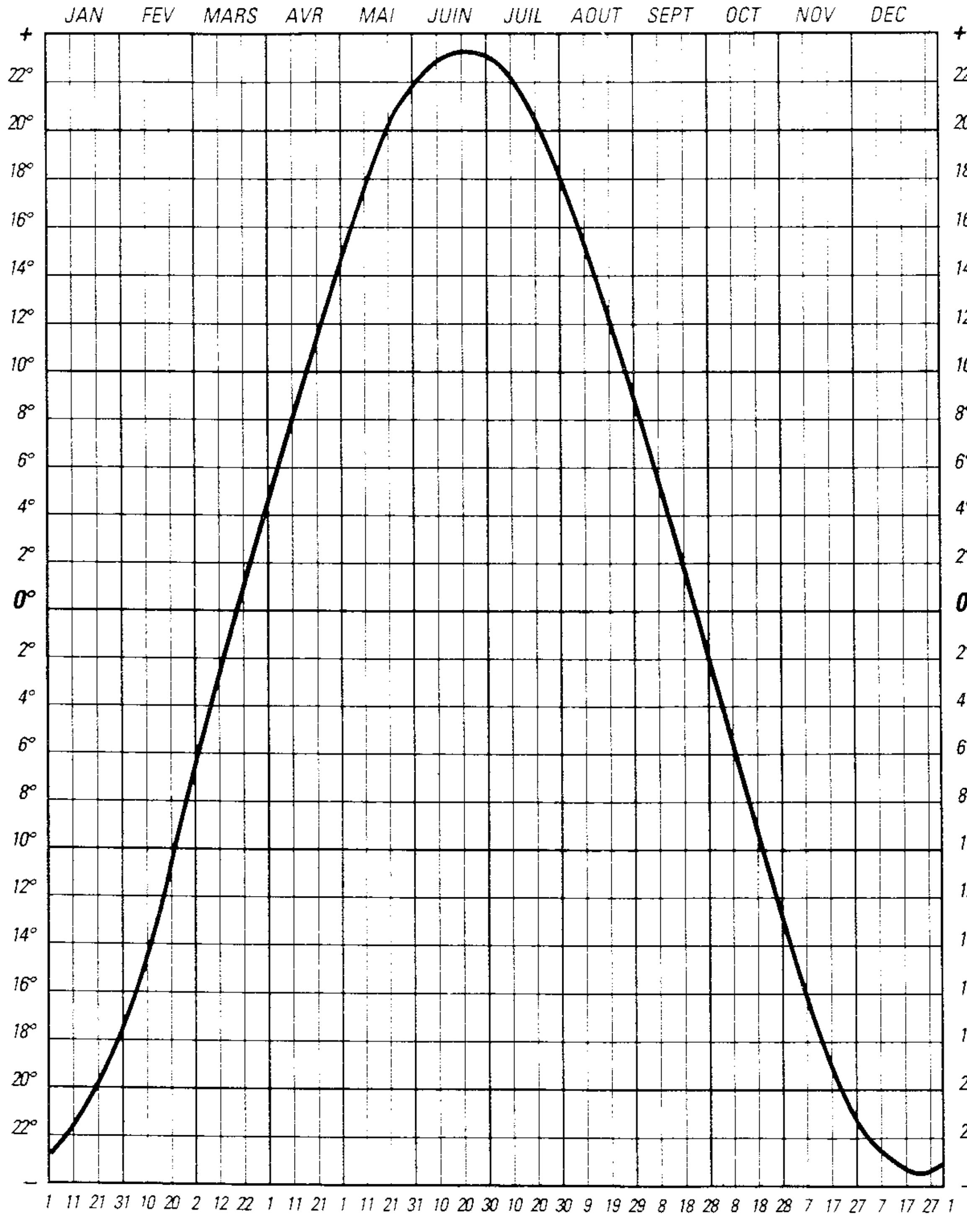


Fig. 3 - Déclinaisons moyennes du Soleil à midi U.T.