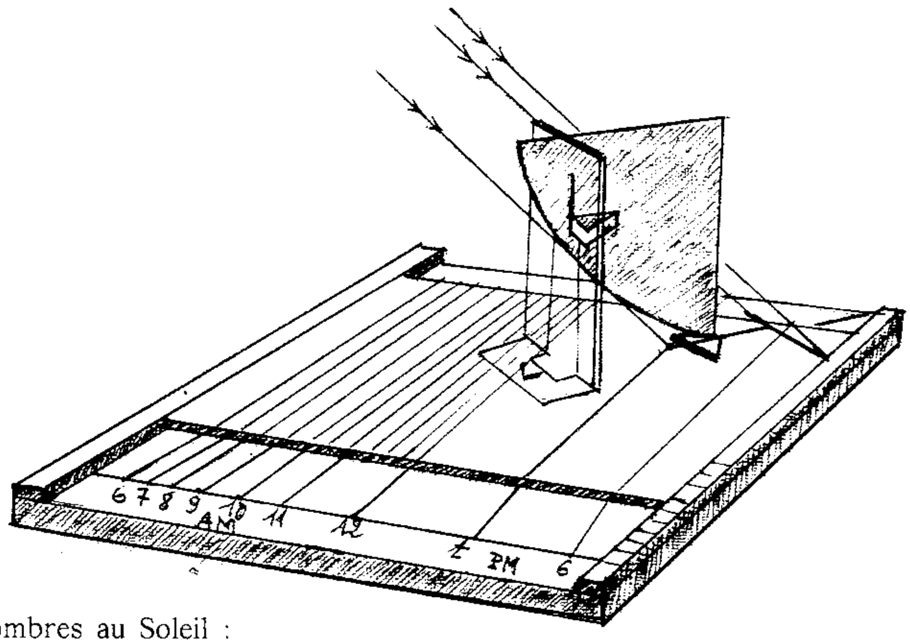
Le cadran solaire de Freeman
Un cadran solaire indépendant de la latitude

Paul Perbost (Nice)

Esquisse du cadran solaire de Freeman d'après une photographie

(*A latitude independent sundial* by J/G.Freeman, Bradford, England - *Journal of the Royal Astronomical Society of Canada*, Toronto, vol 72. , 1978/2)

Fig.1



Remarquer les ombres au Soleil :

- du gnomon, amené dans le plan vertical de l'astre,
- des tasseaux triangulaires de serrage du gnomon contre son cadre transparent (en Perplex ou plexiglas),
- du bord supérieur du cadre (ou châssis), (ou armature),
- du pivot central qui fixe la semelle mobile sur la table glissante.

Observer la ligne indicatrice, parallèle à la méridienne, définie par le point extrême de l'ombre du gnomon courbe, ce point correspondant au rayon lumineux qui frôle la tranche incurvée de l'écran sous incidence rasante.

A cette ligne indicatrice est associée la ligne horaire t marquée sur l'échelle des heures.

Le châssis qui enserre le rnomon peut tourner autour d'un pivot fixé au centre de la table supérieure, à l'aplomb de la pointe supérieure du gnomon. Ainsi on peut amener l'écran dans le plan vertical du Soleil.

Enfin, la table supérieure, dont le gnomon est solidaire, peut glisser sur la table de base de telle sorte que son bord inférieur soit amené en face d'une graduation en déclinaisons, marquée sur le haut du coulisseau de droite du socle, celui-ci étant orienté vers le Nord.

1. Prologue

Les cadrans solaires indiquent essentiellement le temps solaire vrai local, c'est à dire l'angle horaire du centre du disque solaire. Il y est marqué par la position de l'ombre d'un écran, nommé style ou gnomon, sur une surface où sont tracées des lignes horaires corespondant à certains cercles horaires équidistants. Il existe une grande variété de ces instruments. Mais, malgré la surprenante diversité de ceux que la gnomonique a imaginés au cours des siècles, il n'en existe aucun, dans cette riche panoplie, qui soit indépendant de la latitude de l'observateur, ni dans sa conception ni son usage. Cependant, parmi les relations associées au "triangle de position" du Soleil sur la sphère céleste locale, l'une d'elles exprime l'angle horaire sans référence à la latitude.

Donc, bien que la tradition gnomonique n'en donne aucun exemple, il semble théoriquement possible de concevoir, de calculer et de construire un cadran solaire universellement utilisable, quel que soit le lieu où on le consulte, sans avoir à opérer un réglage préalable qui l'adapterait à la latitude de cet endroit.

Disons par anticipation que l'originalité de ce cadran insolite réside dans la forme de son gnomon, dont le bord exposé face au Soleil, dans un plan vertical, se présente sous l'aspect élégamment galbé d'un quart d'astroïde, ou hypocycloïde à quatre rebroussements. La géométrie analytique apprend à construire très simplement cette belle courbe. Par ailleurs, le cadran est constitué par une table horizontale mobile qui peut coulisser entre deux glissières sur une table fixe, comme sur un socle plan placé sous elle. Le gnomon, maintenu par un cadre approprié, peut être amené dans le plan vertical du Soleil autour d'un axe perpendiculaire à la table mobile dont il est solidaire. Nous verrons que la table mobile indique les coordonnées horizontales du Soleil, azimut et hauteur, tandis que la table fixe, dont un bord est gradué en déclinaisons du Soleil, porte les lignes horaires.

Dans ce qui suit, on rappellera les systèmes complets que la trigonométrie sphérique associe au "triangle de position" du Soleil, à propos des coordonnées astronomiques locales. On en déduira une classification des cadrans solaires, du point de vue de ces coordonnées. Et surtout on extraira de ces systèmes l'équation qui exprime l'angle horaire, indépendamment de la latitude, mais en fonction de l'azimut, de la hauteur et de la déclinaison du Soleil. Tout le reste de cette étude se fonde pratiquement sur cette équation.

2. Le triangle de position du Soleil

En un lieu de latitude ϕ, soit A le point directeur d'un astre, par exemple le Soleil, sur la sphère céleste locale, de coordonnées horizontales a et h, azimut et hauteur, et de coordonnées horaires H et δ, angle horaire et déclinaison, telles qu'on les définit en astronomie sphérique. Z et P désignant respectivement les pôles sphériques du grand cercle de l'horizon et du grand cercle de l'équateur céleste, le triangle de position de A est le triangle sphérique ZPA, Z étant le zénith du centre de la sphère et P le pôle céleste, point directeur de l'axe du monde au-dessus de l'horizon. Sans diminuer la généralité, on se bornera au cas où $\phi>0$: alors P est le pôle céleste boréal. L'angle en A, désigné par S n'intervenant généralement qu'à titre auxiliaire, il n'en sera pas question : on le nomme l'angle à l'astre ou angle parallactique.

Les coordonnées horaires sont fournies, en fonction ds coordonnées horizontales, parle groupe suivant (1) et réciproquement (2) :

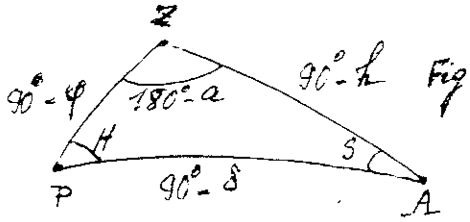


Fig. 2

$$(1)\begin{cases} \sin\delta = \sin\phi\,\sin h - \cos\phi\,\cos h\,\cos a \\ \cos\delta\,\sin H = \cos h\,\sin a \\ \cos\delta\,\cos H = \cos\phi\,\sin h + \sin\phi\,\cos h\,\cos a \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \sin h = \sin\phi\,\sin\delta + \cos\phi\,\cos\delta\,\cos H \\ \cos h\,\sin a = \cos\delta\,\sin H \\ \cos h\,\cos a = -\cos\phi\,\sin\delta + \sin\phi\,\cos\delta\,\cos H \end{cases}$$

3. Une classification des cadrans solaires

Les cinq paramètres associés à la position du Soleil sont : ϕ ; (a,h) et (H,δ). Si l'on met à part H, que doit précisément indiquer le cadran, il reste ϕ, a, h et δ. Or, on démontre qu'on peut calculer trois éléments d'un triangle sphérique dont les trois autres sont donnés. Donc H peut être déterminé par trois des paramètres indiqués. On peut donc envisager quatre cas distincts :

1°) $H = f(\phi,a,h)$: H ne dépend pas de la déclinaison δ. Tel est le cas des cadrans ordinaires, équatoriaux, horizontaux, verticaux, bifilaires, etc.

2°) $H = f(\phi,a,\delta)$: H ne dépend pas de la hauteur h. Le cadran analemmatique elliptique, dont le gnomon est une tige verticale coulissante, entre dans cette catégogie.

3°) $H = f(\phi,h,\delta)$: H ne dépend pas de l'azimut a. Ainsi sont les cadrans de hauteur, en forme de cylindres, d'anneaux, de disques, etc... pour lesquels il n'est pas nécessaire de connaître le Nord ; le couplage d'un cadran horizontal ordinaire et d'un cadran anlemmatique en est un autre exemple.

4°) $H = f(a,h,\delta)$: H ne dépend pas de la latitude.

La relation, extraite des systèmes (1) ou (2) :

$$\text{(E)} \quad \boxed{\cos\delta\,\sin H = \cos h\,\sin a}$$

annonce l'existence de tels cadrans. Dans ce qui suit, on en concevra un modèle plan qui donne l'angle horaire du Soleil, connaissant à la fois et en méme temps son azimut, sa hauteur et sa déclinaison.

Admettons cependant que c'est pluôt une curiosité scientifique qu'un instrument d'usage pratique. On en doit l'invention à J.-G.Freeman, Bradford, England (Journal of the Royal Astronomical Society of Canada, Toronto, vol 72, 1978/2).

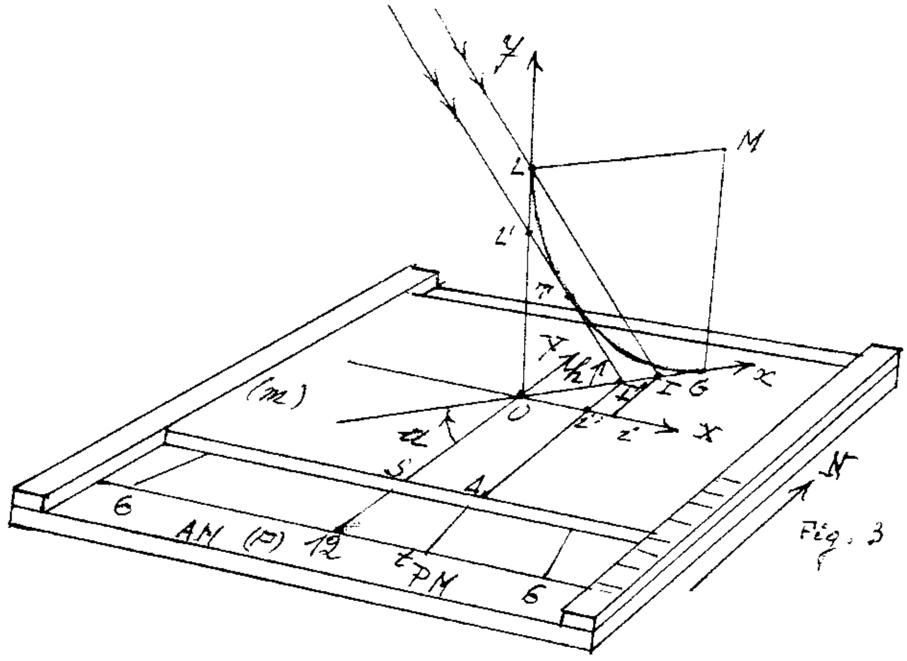

y
M
L
L'
T
Y
h
I
G
x
(m)
O
i'
i
X
a
S
A
N
6
AM
(P)
12
t
PM
6

Fig. 3

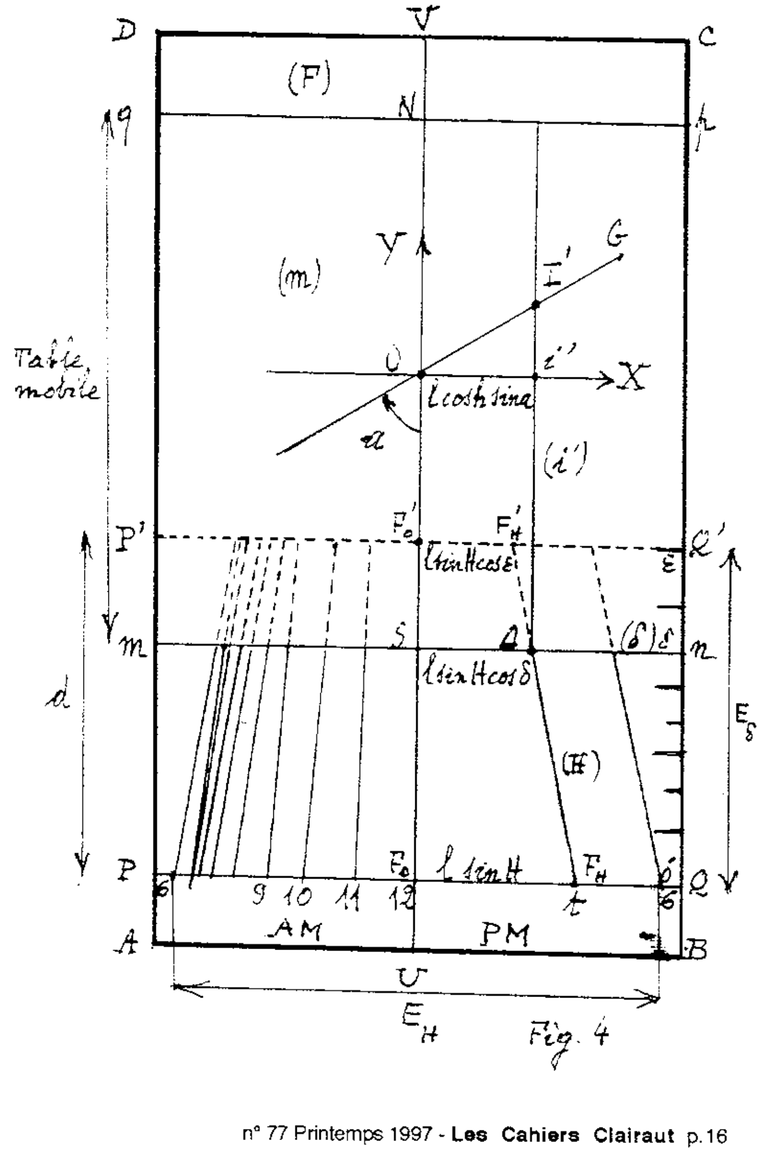

D
V
C
(F)
N
Table mobile
Y
G
(m)
I'
O
i'
X
l cosh sin a
a
(i')
P'
Q'
ε
l sin H cos ε
m
S
(δ) ε
n
l sin H cos δ
d
(H)
P
Q
l sin H
6
9
10
11
12
t
6
AM
PM
A
B
U
E
H

Fig. 4

4. Style droit télescopique ou gnomon courbe orientable

a) Le style droit

On nomme ainsi une tige verticale, OL, dressée sur une table horizontale (m). Soit l sa longueur. Si h est la hauteur du Soleil, la longueur de l'ombre portée par le style sur la table est égale à l cot h. Donc, relativement au repère orthonormé (Oxy), dans le plan vertical du Soleil, le point I où le rayon incident passant par L tombe sur la table a pour abscisse :

$$(1) \qquad \overline{OI} = l \cot h \qquad \text{(fig. 3)}$$

Le style droit peut donc remplacer le théodolite puisqu'il permet d'évaluer h, et que la direction de l'ombre opposée à celle du Soleil détermine son azimut, a. Par projection sur l'axe OX dans le repère (OXY) auquel on rapporte la table (m), on a :

$$(2) \qquad \overline{Oi} = l \cot h \sin a$$

Guidés par l'équation (E), multiplions cette valeur par sin h. Il vient :

$$(3) \qquad \overline{Oi'} = l \cos h \sin a$$

Or, cette expression n'est autre que le produit par l du second membre de (E). La multiplication par sin h suggère alors d'effectuer l'homothétie H(O,sin h) de centre O, fixe sur (m), et de rapport continûment variable sin h. Une telle transformation conserve le parallélisme, donc les angles, tan,dis qu'elle multiplie les longueurs par son rapport. De telle sorte que :

$$(4) \qquad \overline{OL'} = l \sin h$$
$$\overline{OI'} = l \cos h$$

On est ainsi conduit à imaginer un procédé technique qui piloterait en quelque sorte les oscillations du sommet L du style droit, de telle façon que les deux égalités précédentes soient satisfaites, au gré des fluctuations de h. Une tige télescopique magique conviendrait si l'on avait le moyen de régler continûment la position de son sommet comme on vient de le dire. Un ordinateur saurait le faire. Mais on peut fort élégamment s'en passer.

b) Un gnomon courbe éclectique

Au delà de la science fiction, on peut se demander plus concrètement si un écran plan à bord courbe interposé sur le flux lumineux du Soleil, dans le plan xOy, n'aurait pas le même effet modulateur quitte à supprimer alors le style droit, devenu ipso facto fictif.

Les indicatrices d'angle horaire et de déclinaison

Toujours conduits par l'équation (E) écrite sous forme équivalente :

$$\boxed{\underbrace{l \cos h \sin a}_{f(a,h)} = \underbrace{l \sin H \cos \delta}_{f(H,\delta)}} \qquad \text{(E')}$$

nous voyons que l'abscisse de Δ, précédemment définie, s'exprime aussi par

$$\boxed{\overline{S\Delta} = l \sin H \cos \delta}$$

Dès lors, ce point, qui appartient déjà à l'indicatrice (i'), devra se trouver également au croisement de l'indicatrice de déclinaison, (δ), et de l'indicatrice horaire, (H), (fig. 4) qui seront définies et construites ci-après.

La figure montre schématiquement la table mobile (m), ou mnpq, posée sur la table fixe (F), ou ABCD, de telle sorte que le bord inférieur de (m) ait été amené en coïncidence avec (δ). La marque des graduations de l'échelle de déclinaison, E_δ, est simplement indiquée, entre Q et Q', sur BC, ainsi que quelques lignes convergentes de l'échelle horaire, E_H, tracées sur (F) et qui seront finalement les lignes horaires du cadran.

Entrainée par le glissement de (m), la droite (δ) balaie une zone rectangulaire délimitée sur (F) par deux parallèles PQ et P'Q', telle un barreau mobile appuyé sur les graduations de E_δ. Il est évidemmenent inutile de tracer cette indicatrice, car elle est constamment à l'aplomb du bord inférieur de (m) sur (F). Mais, comme $S\Delta$ fait intervenir la déclinaison par son cosinus, les degrés de E_δ ne peuvent qu'indiquer des valeurs absolues, de telle sorte que

$0° \leq |\delta| \leq | \epsilon|$

où ϵ désigne l'obliquité de l'écliptique (23°27'). Les valeurs extrêmes de cet encadrement correspondent évidemment aux équinoxes et aux solstices, sans distinction des saisons. Un tableau annuel des déclinaisons quotidiennes serait utile. nous en donnons un, en annexe.

La largeur de QQ', c'est à dire l'amplitude de E_δ, peut naturellement être choisie arbitrairement, indépendamment de la longueur l. Nous la désignerons par d.

En définitive, la table mobile (m) est associée au premier membre de (E') tandis que la table fixe (F) est liée à son second membre. La translation de (m) sur (F) est guidée par deux coulisseaux fixés latéralement sur les bords opposés de la table (F), parallèlement à la méridienne SN (cf fig. 1 et 3). Et c'est au carrefour Δ des trois indicatrices (i'), (δ), et (H) qu'on pourra lire l'heure en toute latitude.

Observons d'abord que le segment I'L' ne varie pas de longueur, puisque selon les expressions (4), on a $I'L'^2 = l^2(\sin^2 h + \cos^2 h)$; donc $I'L' = l$

Par conséquent le bord courbe à déterminer est l'enveloppe d'un segment de longueur invariable dont les extrémités glissent sur les axes rectangulaires Ox et Oy. Or il existe une courbe remarquable qui remplit ces conditions : c'est une hypocycloïde à quatre rebroussements, joliment nommée astroïde. On la construit aisément ; nous en reparlerons. La figure 3 représente en perspective l'écran plan LMG, ou gnomon , dont le bord incurvé tourné vers le Soleil dans un plan vertical a précisément la forme requise. Ainsi, tandis que l'ombre du style droit télescopique OL' imaginé ci-dessus, puis abandonné par simple souci de réalisme, eût été OI', celle du gnomon courbe qui le remplace concrètement devient I'G, produit par le rayon lumineux incident qui rase tangentiellement le bord du gnomon en T.

(à suivre)