KEPLER , NEWTON ... et MERCURE

Le tracé de l'orbite de la planète Mercure permer d'étudier les lois de Képler et celle de la gravitation due à Newton. Pour le nouveau programme de TS ce TP, qu'il est possible de scinder en deux parties, s'intègre très bien dans le chapitre " Interaction gravitationnelle".

I. La trajectoire de Mercure:

On trace au milieu d'une feuille de format A_3 (42×28.7) une ligne x'x dans le sens de la longueur et on place S (le Soleil) à 18 cm du bord droit (figure 1)

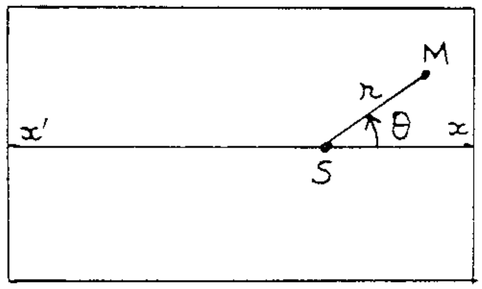


figure 1

Les positions successives de Mercure (point M) sont reportées grâce aux valeurs figurant dans le tableau de l'Annexe.
avec r = SM = distance entre Soleil et Mercure en unité astronomique U.A. ; 1 U.A.= 1.5×10^{11} m
θ = (Sx , SM) = anomalie vraie de Mercure.

Echelle conseillée: 30 cm ⇒ 1 U.A.
On trace ensuite soigneusement la trajectoire par continuité. On obtient la figure 2.

II. Lois de Képler:

1. Nature de la trajectoire:

Manifestement, il ne s'agit pas d'un cercle de centre S. Montrons qu'il s'agit d'une ellipse dont S est l'un des foyers. La position de Mercure la plus proche du Soleil (c'est le point de départ de la construction) est le périhélie P. On trace PS qui coupe la trajectoire en un deuxième point : l'aphélie A qui est la position de Mercure la plus éloignée du Soleil. On mesure PA = 23.2 cm = 2 a avec a = demi-grand axe. Soit O le milieu de PA et S' le symétrique de S par rapport à O .
On mesure OS = c = 2.4 cm
L'excentricité est e = c/a = 2.4/11.6 = 0.207
Soit M un point de la trajectoire . On vérifie que SM + S'M = 2 a = 23.2 cm

et ceci, quel que soit le point M choisi : cela prouve que la trajectoire est bien une ellipse dont S est l'un des foyers (première loi de Képler)

2. Loi des aires

On place une feuille de papier calque de format 24×32 sur la trajectoire obtenue. On y marque les positions de S et celles de Mercure pour les indices 1, 3, 8, 10, 13 et 15 .

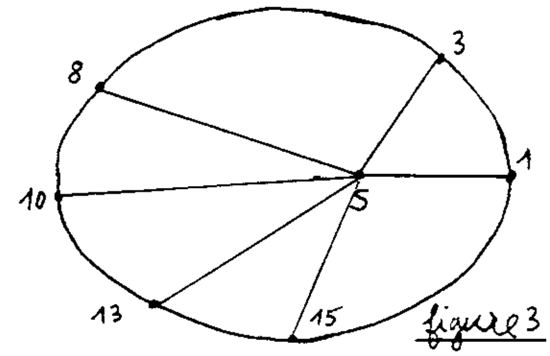


figure 3

Ce calque est ensuite placé sur du carton épais et on y reporte à l'aide d'une épingle à tête plate (dite de signalisation) les contours des surfaces S,1,3 S,8,10 et S,13,15. (figure 3)
Après découpage au cutter on réalise les pesées.

Le carton étant homogène et d'épaisseur constante, l'égalité des masses montre l'égalité des surfaces . Ainsi, le rayon vecteur SM a balayé des surfaces égales pendant des durées égales à 10 jours. C'est la seconde loi de Képler. Nous avons obtenu 8 grammes pour 10 jours (carton d'épaisseur 3.5 mm)

3. Loi harmonique :

* Pour Mercure : a = 11.6 cm sur le dessin soit en tenant compte de l'échelle 11.6/30 = 0.387 U.A.

La période de révolution sidérale s'obtient à partir de la trajectoire : entre les positions 1 et 18 il s'est écoulé $17 \times 5 = 85$ jours mais la planète n'a pas totalement bouclé son tour . Une interpolation entre les points 18 et 19 donne la valeur à ajouter : $3/5 \times 5 = 3$ jours . Ainsi T = 88 jours .
Exprimons cette période en année terrestre T = 88/365.25 = 0.241 an

$$\text{d'où} \quad a^3 / T^2 = (0.387)^3 / (0.241)^2 \ \# \ 1 \ \mathrm{UA}^3 \ \mathrm{an}^{-2}$$

* Pour la Terre : a' = 1 U.A. T' = 1 an

$$\text{d'où} \quad a^3 / T^2 = 1 \ \mathrm{UA}^3 \ \mathrm{an}^{-2}$$

La 3e loi de Képler se trouve vérifiée.

Exercice complémentaire : Sachant que la période de révolution sidérale de Mercure est de 88 jours et en utilisant les résultats du paragraphe 2, quelle est la masse de la plaque de carton obtenue en découpant l'ellipse complète? (réponse : loi des aires $\Rightarrow$ $0.8 \times 88 = 70.4$ g) . A vérifier par pesée.

III. Loi de Newton :

1. Tracé de vecteurs accélération :

On trace le vecteur accélération en plusieurs points de la trajectoire ;
Exemple : point M_3

Construire en M_3 le vecteur $\overrightarrow{v_4} \,//\, \overrightarrow{M_3M_5}$

puis à partir de son extrémité tracer $-\overrightarrow{v_2} \,//\, \overrightarrow{M_3M_1}$

d'où $\overrightarrow{\Delta v} = \overrightarrow{v_4} - \overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{a_3} = \overrightarrow{\Delta v}/\Delta t$

Echelle conseillée : 1 cm $\Rightarrow$ 10 $km{\cdot}s^{-1}$

On utilise pour faire ces tracés la méthode de " l'équerre et de la règle"

La mesure donne $\Delta v \Rightarrow$ 4.5 cm $\Rightarrow$ 45 $km\ s^{-1}$ et $\|\overrightarrow{a_3}\| = 5.2 \times 10^{-2}\ m{\cdot}s^{-2}$

On fait de même pour d'autres points (indices pairs pour la moitié des élèves et impairs pour les autres)

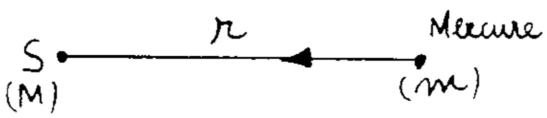
Résultats :

point	Δv ($km\ s^{-1}$)	$\|\vec{a}\|$ ($m\ s^{-2}$)	r (m)	a r^2 10^{20} (SI)
M_3	45	$5.2\ 10^{-2}$	$5.04\ 10^{10}$	1.32
M_5	33	3.8	5.88	1.31
M_7	27	3.1	6.60	1.35
M_9	23	2.7	6.96	1.29
M_{11}	25	2.9	6.93	1.39
M_{13}	27	3.2	6.50	1.34

etc...

Tous les vecteurs $\vec{a}$ sont dirigés pratiquement vers S: l'accélération est radiale et on vérifie que les produits a r^2 sont pratiquement égaux et de valeur moyenne $\cong 1.33 \times 10^{20}$ SI

2. Calcul de la masse du Soleil:



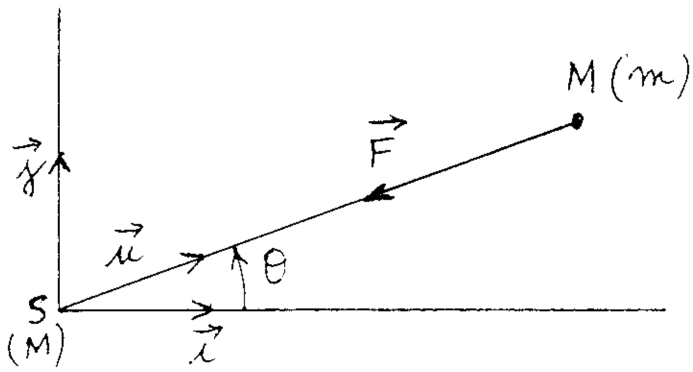
$$F = G\,M\,m / r^2 = m\,a$$

Ainsi $a\,r^2 = G\,M \Rightarrow M = 1.33 \times 10^{20} / 6.67 \times 10^{-11} = 2 \times 10^{30}$ kg

IV. De Newton à la trajectoire avec une calculette

1. Principe de la méthode :

On se donne la position d'un point M (x_0 ; y_0) et son vecteur vitesse $\vec{v_0}$ (v_{x_0}, v_{y_0}) à un instant t_0 . Puis on fait agir sur M (de masse m) pendant une durée Δt la force de gravitation considérée comme constante pendant cette durée : ainsi le vecteur accélération $\vec{a}$ sera lui aussi constant pendant cette durée ; ainsi $\vec{a} = \vec{F} / m = \vec{\Delta v} / \Delta t = - GM / r^2 \times \vec{u}$



$$\vec{u} \left| \begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{array} \right.$$

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = - GM \dfrac{x}{r^3} \\ a_y = - GM \dfrac{y}{r^3} \end{array} \right.$$

la nouvelle vitesse sera $\vec{v_1} = \vec{v_0} + \vec{\Delta v}$

$$\vec{V_1} \left| \begin{array}{l} v_{x_1} = v_{x_0} + a_x \Delta t \\ v_{y_1} = v_{y_0} + a_y \Delta t \end{array} \right.$$

et la nouvelle position de M s'en déduit :

$$x_1 = x_0 + v_{x_1} \Delta t \qquad y_1 = y_0 + v_{y_1} \Delta t$$

Ensuite, on refait le même raisonnement à partir de cette nouvelle position et, de proche en proche, on obtient les positions successives que l'on reporte sur papier millimétré . Cette méthode d'intégration numérique met très bien en évidence le raisonnement physique (c'était d'ailleurs également celui de Newton lui- même !) sans utiliser un formalisme mathématique compliqué. La méthode est d'autant plus performante que la durée Δt est plus petite .

2. Application à Mercure :

$$\left. \begin{array}{lll} GM = 1.3267 \times 10^{20} \text{ S.I.} & \Rightarrow & K \\ \Delta t = 10\,800 \text{ s} \quad \text{(soit 1/8 de jour)} & \Rightarrow & T \\ U = 1.5 \times 10^{11} \text{ m} & \Rightarrow & U \end{array} \right\} \text{constantes}$$

l' organigramme s'écrit :

$$
\left.\begin{array}{lll}
x_0 = 0.3075 \times U & \Rightarrow & X \\
y_0 = 0 & \Rightarrow & Y \\
v_{x_0} = 0 & \Rightarrow & V \\
v_{y_0} = 58960 & \Rightarrow & W
\end{array}\right\} \text{initialisation}
$$

$r = \sqrt{(X^2 + Y^2)} \Rightarrow R$

$s = 1 / r^3 \Rightarrow S$

$a_x = - K \times X \times S \Rightarrow A$

$a_y = - K \times Y \times S \Rightarrow B$ boucle de calculs

$V = V + A \times T$ $W = W + B \times T$

$X = X + V \times T$ $Y = Y + W \times T$

$x = X / U \times 30$ $y = y / U \times 30$ sortie des résultats à l'échelle

On obtient pratiquement la même trajectoire que dans la partie I .

BIBLIOGRAPHIE :

Gravitation et lumière : hors série n° 5 des Cahiers Clairaut

Ephémérides astronomiques : Annuaire du Bureau des longitudes

Astronomie et ordinateur - Guy Sérane - Dunod

De Newton à Képler avec une calculette : Cahiers Clairaut n° 21.

Jean-Paul ROSENSTIEHL
Lycée Montesquieu
Le Mans

ANNEXE : positions et vitesses de Mercure

Indice	date	angle θ (°)	distance r U.A.	vitesse v $km \cdot s^{-1}$
1	1995.0720	0	0.3075	58.9
2	1995.0725	31	0.315	57.8
3	.0730	60	0.336	54.6
4	.0804	85	0.363	50.9
5	.0809	106	0.392	47.3
6	.0814	124	0.418	44.2
7	.0819	140	0.440	41.7
8	.0824	155	0.455	40.1
9	.0829	169	0.464	39.1
10	.0903	183	0.467	38.8
11	.0908	197	0.462	39.3
12	.0913	211	0.450	40.6
13	.0918	227	0.432	42.6
14	.0923	244	0.408	45.4
15	.0928	263	0.381	48.6
16	.1003	286	0.352	52.4
17	.1008	312	0.326	56.1
18	.1013	342	0.310	58.6
19	.1018	13	0.309	58.7

Date : AAAA.MMJJ   1995.0903 est le
3 septembre 1995.

ORBITE DE MERCURE

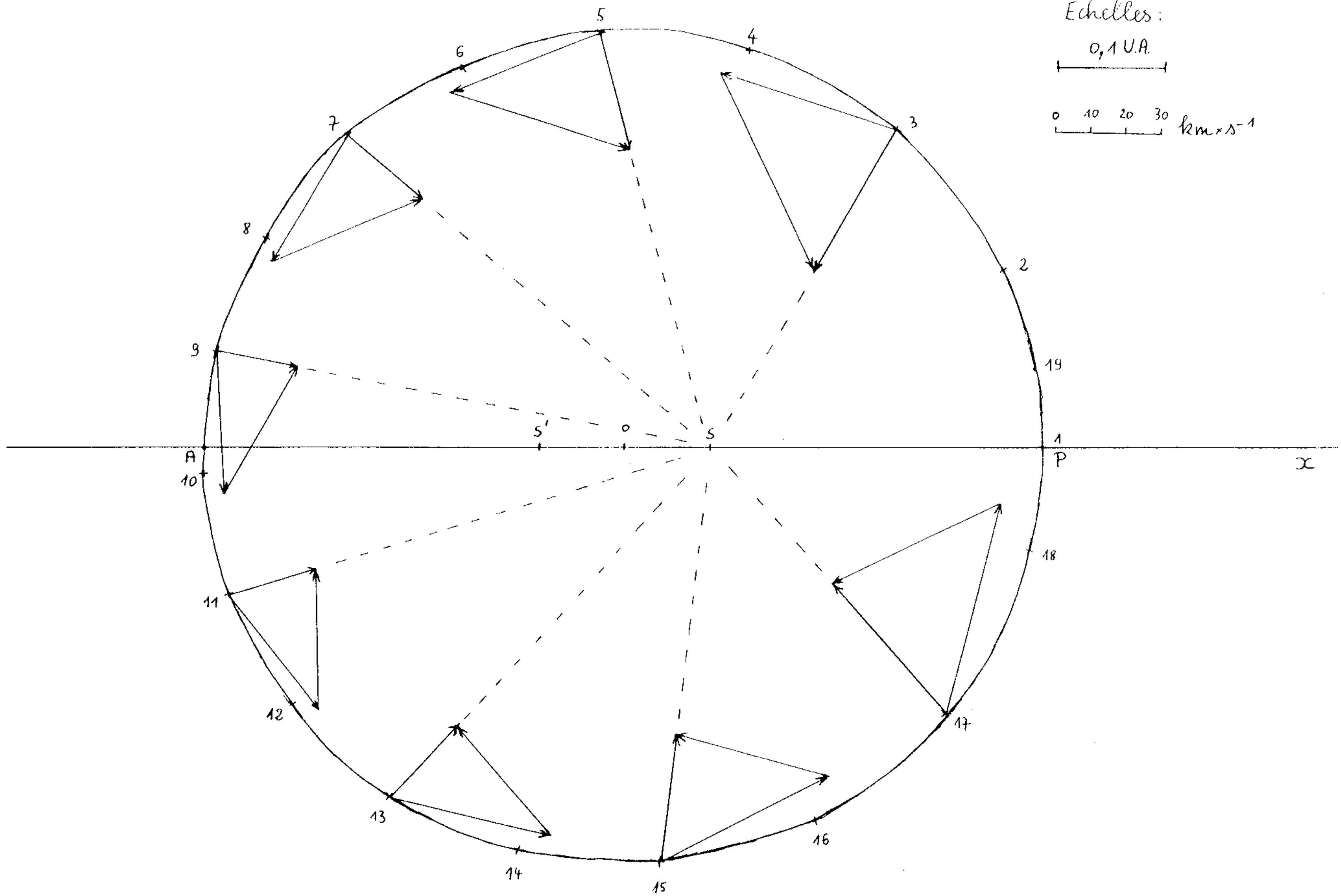


figure 2