# A propos du cadran bifilaire

**Paul Perbost** (Nice)

N.D.L.R. Notre Collègue Perbost nous a donné (**Cahiers Clairaut n°65**, p30-36) la description, le principe et la méthode de construction du cadran bifilaire ; il complète aujourd'hui cette présentation en nous proposant un peu de géométrie...

## 9. Etude analytique des arcs de déclinaison

### a) Préambule

La forme et la position de la trajectoire décrite quotidiennement par le "point d'ombre" sur la table du cadran varie d'un jour à l'autre et se retrouve identique à elle-même au bout d'une année. Cette trajectoire, ordinairement curviligne, tourne sa concavité tantôt vers le Nord et tantôt vers le Sud, du moins sous nos latitudes. Cependant, à l'époque des équinoxes elle "dégénère" en une droite ; véritable ligne de partage des arcs parcourus par l'ombre, on le nomme précisément l'équinoxiale du cadran. Parmi les arcs de déclinaison, deux sont particulièrement importants : les arcs des solstices. Les Anciens savaient qu'aux époques correspondantes, le gnomon, simple piquet vertical, avait une ombre méridienne maximale ou minimale. C'est pourquoi le gnomon est souvent appelé héliotrope, c'est à dire étymologiquement "indicateur des conversions du Soleil" (ou encore des solstices). Bien plus qu'une horloge, le cadran solaire fut d'abord un calendrier, qui permit d'établir la durée de l'année, les équinoxes, les solstices, les latitudes géographiques, l'obliquité de l'écliptique, etc. Citons à ce propos les noms de Hipparque, de Ptolémée, de Vitruve, de Pythéas, etc qui firent du gnomon un usage savant.

A ce point de vue, les arcs de déclinaison ont autant d'importance que les lignes horaires. Nous avons déjà examiné une méthode numérique qui permet de les construire point par point. Mais, pour connaître leur nature géométrique précise, il faut faire une étude mathématique rigoureuse. Plusieurs méthodes peuvent être envisagées. Nous choisirons la voie analytique, qui nous a déjà conduit au tracé des lignes horaires. Pour suivre le développement, il sera utile de se reporter aux figures et, en particulier à la figure 2 (**Cahiers Clairaut 65**, p.32).

### b) Principe

Les arcs de déclinaison, ou ensembles des points $M(x,y)$ sont définis implicitement par une relation contenant uniquement leurs coordonnées rapportées au repère $(O,i,j)$, la déclinaison du Soleil ($\delta$), la latitude ($\phi$) et la longueur ($l$) choisie arbitrairement, à l'exclusion évidemment de lângle horaire (H).

### c) Calculs : à la recherche d'une équation

Pour éliminer H, d'entrée, considérons les égalités suivantes qui lient les coordonnées horizontales (a,h) aux coordonnées horaires (H,$\delta$) en un lieu de latitude $\phi$ :

$$\cos\delta \sin H = \cos h \sin a$$

$$\cos\delta \cos H = \sin h \cos\phi + \cos h \sin\phi \cos a$$

(Cf André Danjon, **Astronomie générale**, p.47). Leur addition, après élévation au carré, entraîne la suivante où H a disparu :

$$\cos^2\delta = \cos^2 h \sin^2 a + \sin^2 h \cos^2\phi + 2 \sin h \cos h \sin\phi \cos\phi \cos a + \cos^2 h \sin^2\phi \cos^2 a$$

C'est la "clef du problème". Tout se ramène maintenant à exprimer les termes où figure h en fonction des coordonnées (x,y) de M, de $\delta$, de l et de $\phi$.

Rappelons ensuite l'expression des coordonnées de M :

$$x = l' \sin a \;\mathrm{cotg}\; h$$
$$y = l \cos a \;\mathrm{cotg}\; h$$

Par combinaison linéaire, on en tire aisément :

$$l^2x^2 + l'^2y^2 = l^2l'^2\mathrm{cotg}^2h$$

qui donne $$\mathrm{cotg}^2h = \frac{l^2x^2 + l'^2y^2}{l^2l'^2}$$

De cette expression, on tire celles de $\sin^2h$ et de $\cos^2h$. Puisque $l/l' = \sin \phi$ dans le cadran bifilaire, on obtient après des calculs que le lecteur curieux aura plaisir à vérifier

$$(\gamma) \qquad (\sin^2\delta)x^2 - (\cos^2\delta - \sin^2\delta)y^2 + (l \sin 2\phi)y - l^2 (\cos^2\delta - \cos^2\phi) = 0$$

Sans entrer dans le détail de la discussion sur la nature de la courbe définie par cette équation, bornons-nous à rappeler qu'elle définit une <u>famille de coniques</u>, dont le genre dépend des coefficients c'est à dire conjointement de $\phi$ et de $\delta$, comme pour d'autres types de cadrans solaires.

## d) Réduction de l'équation

Dans le cas général, $(\gamma)$ est une conique à centre (ellipse ou hyperbole). On démontre d'ailleurs que ce centre $\omega$ a pour coordonnées

$$x = 0 \;;\; y = l\,\frac{\sin \phi \cos \phi}{\cos^2\delta - \sin^2\phi}$$

A partir de là, en procédant à une translation des anciens axes amenant la nouvelle origine en $\omega$, on obtient l'équation réduite de la conique :

$$(\Gamma) \qquad \frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} - 1 = 0$$

avec $b^2 = l^2 \dfrac{\sin^2\delta \cos^2\delta}{(\cos^2\delta - \sin^2\phi)^2}$ et $a^2 = l^2 \dfrac{\cos^2\delta}{\cos^2\delta - \sin^2\phi}$

$(\Gamma)$ est l'équation d'une ellipse si la latitude géographique est supérieure au complément de la valeur absolue de la déclinaison, ce qui ne se produit que dans les zones polaires ; dans tous les autres cas, c'est une hyperbole et l'arc de déclinaison est, à proprement parler, un arc d'hyperbole.

A l'exception , évidemment, des jours d'équinoxe, $\delta = 0$ où l'équation $(\gamma)$ se réduit à celle d'une droite :

$$y \cos \phi - l \sin \phi = 0$$

Les lecteurs amateurs de calcul se plairont à trouver les sommets de $(\Gamma)$ sur la méridienne et à calculer l'angle $2\theta$ des asymptotes dont la moitié est donnée pat $\mathrm{tg}\;\theta = b/a$. On en déduirait, par exemple, l'écart entre les azimuts au lever ou au coucher du Soleil pour les déclinaisons extrémales du Soleil (solstices) au lieu considéré.