Le Cadran bifilaire

Paul Perbost (Nice)

1. DESCRIPTION

Le cadran solaire insolite imaginé par H.Michnik*, se compose d'une table horizontale, (H), au-dessus de laquelle sont tendus deux fils parallèles à son plan, d'où son nom. L'un de ces fils, (F), est maintenu par deux supports verticaux, Ee et Ww, d'égale longueur, l, fixés en deux points E et W pris arbitrairement sur la droite Est-Ouest. L'autre fil, (F'), est maintenu à la distance l' de la table par deux autres supports verticaux, Nn et Ss, fixés en des points N et S de la méridienne. Cependant, les deux fils ne se touchant pas, car $l \neq l'$, leurs directions sont simplement orthogonales (sauf aux pôles où la latitude vaut +/- 90°). Les droites cardinales , (NS) et (EW) se coupent en O ; la droite (OZ) est la verticale de O (Z, zénith). Elle traverse les fils en G et G' (fig. 1).

Le Soleil, Σ, éclairant le cadran de ses rayons parallèles, les ombres (f) et (f') des fils se croisent au "point d'ombre" M, sur la table. On lit l'heure en repérant la position de M relativement à un réseau de lignes horaires non représentées sur la fig.1 mais que nous apprendrons à tracer : c'est d'ailleurs la question essentielle. Nous verrons que par un choix judicieux du rapport des longueurs l et l', selon la latitude, on peut faire en sorte que les lignes horaires constituent un faisceau de droites concourantes, convergeant vers un point que l'on nomme le centre du cadran, à la manière des baleines régulièrement déployées d'un éventail plan, facilement réalisable. (A l'équateur, cependant, ces droites sont parallèles).

L'une des originalités de ce cadran réside dans l'idée géniale de son inventeur, du choix simplificateur du rapport des longueurs l et l', selon la latitude. La justification mathématique de ce choix peut sembler laborieuse. Mais quand on s'est donné la peine d'en suivre le fil, on est surpris d'aboutir à un cadran dont le dépouillement contraste étrangement avec la complexité des calculs. Cette simplicité de réalisation pratique du cadran est un autre aspect de son originalité. On peut naturellement y tracer d'autres lignes que les droites horaires, par exemple, selon un usage courant en gnomonique, les arcs des signes, qui transforment les cadrans en calendriers solaires, etc.

2. REPERAGE DU POINT D'OMBRE INDICATEUR DE L'HEURE

La position de ce point, M, à un instant donné ne dépend évidemment que de celle du Soleil sur la sphère céleste locale. Or, elle est connue par les coordonnées de l'astre, dans l'un ou l'autre des deux systèmes astronomiques locaux : les coordonnées horizontales (azimut, a ; hauteur, h), ou les coordonnées horaires (angle horaire, H ; déclinaison, δ). D'ailleurs, on peut passer d'un système à l'autre par des relations que l'on utilise fréquemment en astronomie sphérique.

Mais il faut d'abord équiper le plan horizontal, (H), d'un repère, car c'est le plan fondamental du système de coordonnées horizontales. D'autre part, en raison même des définitions usuelles de l'azimut et de l'angle horaire, il est naturel que l'un des axes de ce repère ait pour support la méridienne, (NS), trace du plan méridien sur le plan (H).

Par conséquent, on placera l'origine, O, du repère, à la croisée des droites cardinales (NS) et EW) et on donnera aux vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ le même module, le premier orientant l'axe Ox vers l'Est et le second l'axe Oy vers le Nord, de telle sorte que l'azimut, a, du Soleil croisse au cours de mon mouvement diurne. Toutes les longueurs seront alors mesurées avec la même unité, celle des vecteurs unitaires du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (fig 2.).

3. DE FIL EN AIGUILLE : COMMENT CONFECTIONNER UN RESEAU DE LIGNES HORAIRES

La verticale (OZ) traverse les fils en G et G' respectivement. Ces deux points appartiennent en quelque sorte au "gnomon fictif OGG', que l'on nomme parfois "style droit" (en italien, par exemple, le mot ago, aiguille, désigne le style des cadrans ordinaires). Quoi qu'il en soit de ces dénominations stylistiques, soient g et g' les ombres des points G et G', lorsque le Soleil a pour azimut a et pour hauteur h (fig 2). Alors, l'ombre (f') du fil (F') est portée par la parallèle menée par g' à Oy, tandis que celle du fil (F) a pour support la parallèle menée par g à Ox. Ces ombres se croisent au point M, dont il s'agit d'exprimer les coordonnées dans l'un ou l'autre des deux systèmes locaux évoqués ci-dessus.

a) Position du point d'ombre selon les coordonnées horizontales du Soleil.

En posant $Og = \rho$ et $Og' = \rho'$, on a d'abord :

$$\rho = l \operatorname{cotg} h \quad \text{et} \quad \rho' = l' \operatorname{cotg} h$$

d'où, par projection sur les axes du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'expression des coordonnées cartésiennes de g et g' :

$$g \begin{cases} x = \rho \sin a \\ y = \rho \cos a \end{cases} \qquad g' \begin{cases} x = \rho' \sin a \\ y = \rho' \cos a \end{cases}$$

Or, par définition même, le point d'ombre M a pour abscisse celle de g', et pour ordonnée celle de g. Par conséquent, les coordonnées cartésiennes de ce point sont les suivantes ;

$$M \{ x = \rho' \sin a \qquad y = \rho \cos a \}$$

soit, plus explicitement, en fonction des longueurs l et l' et des coordonées horizontales a et h du Soleil :

$$M \{ \; x = l' \sin a \operatorname{cotg} h \;, \quad y = l \cos a \operatorname{cotg} h \; \} \quad \text{(I)}$$

b) Position du point d'ombre selon les coordonnées horaires du Soleil.

Pour passer aux coordonnées horaires (H,δ), on utilisera les relations classiques suivantes, où ϕ désigne la latitude du point O :

$$\begin{cases} \sin h = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H \\ \cos h \cos a = - \cos \phi \sin \delta + \sin \phi \cos \delta \cos H \\ \cos h \sin a = \cos \delta \sin H \end{cases}$$

On en déduit facilement, par des substitutions élémentaires qu'il serait fastidieux de transcrire en détail, les nouvelles coordonnées du "point d'ombre" :

$$M \quad \boxed{\begin{aligned} x &= l' \frac{\cos\delta \sin H}{\sin\phi \sin\delta + \cos \phi \cos \delta \cos H} \\ y &= l \frac{\sin\phi \cos\delta \cos H - \cos\phi \sin\delta}{\sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos H} \end{aligned}} \quad \text{(II)}$$

Telles sont les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, en fonction des longueurs l et l', des coordonnées horaires du Soleil (H, δ) et de la latitude ϕ. Nous allons en déduire l'équation des lignes horaires, par rapport auxquelles la position de M sera repérée sur le plan (H)

4. EQUATIONS DES LIGNES HORAIRES

a) Principes

Il s'agit maintenant de tirer des équations paramétriques précédentes, une relation aussi simple que possible, entre les coordonnées (x,y) de M, ne contenant pas la déclinaison du Soleil, afin que l'équation définissant les "lignes horaires" qui résultent de cette élimination, ne dépende plus désormais que de H et que, dès lors, le réseau de ces lignes soit immuable tout au long de l'année, ce qui permettra de graver une fois pour toutes sur le cadran autant de lignes horaires qu'on le voudra. On optera, évidemment, pour la solution pratique optimale.

b) Calculs

En divisant simultanément les termes des fractions de la relation (II) par $\cos\delta$, on

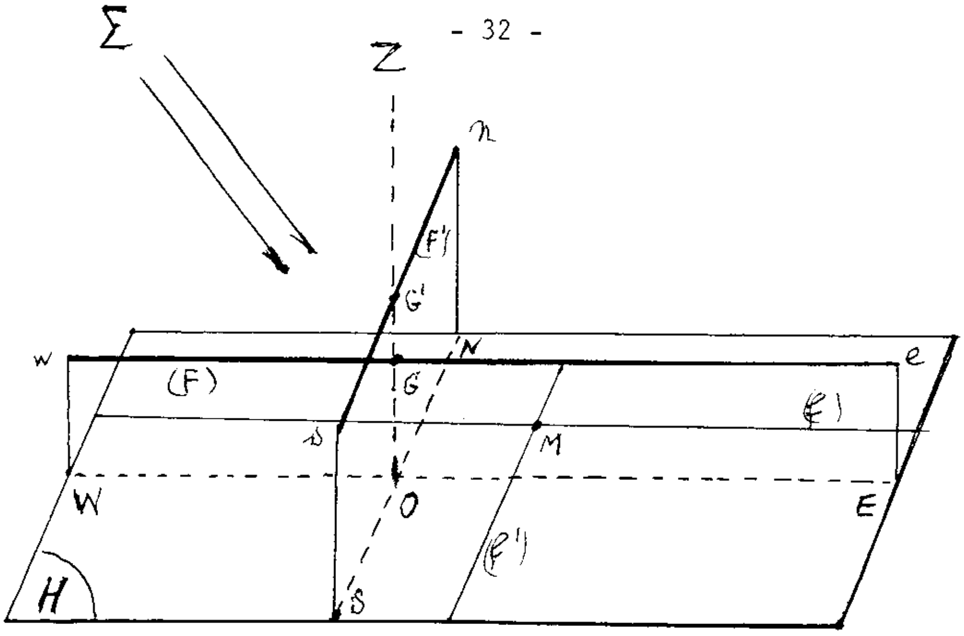

fig 1

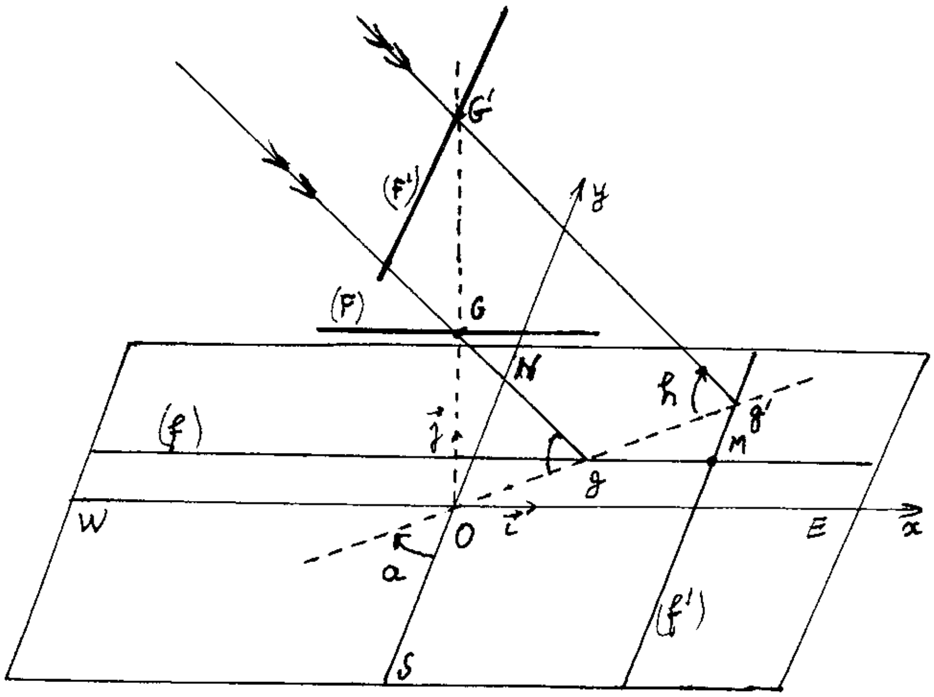

fig 2

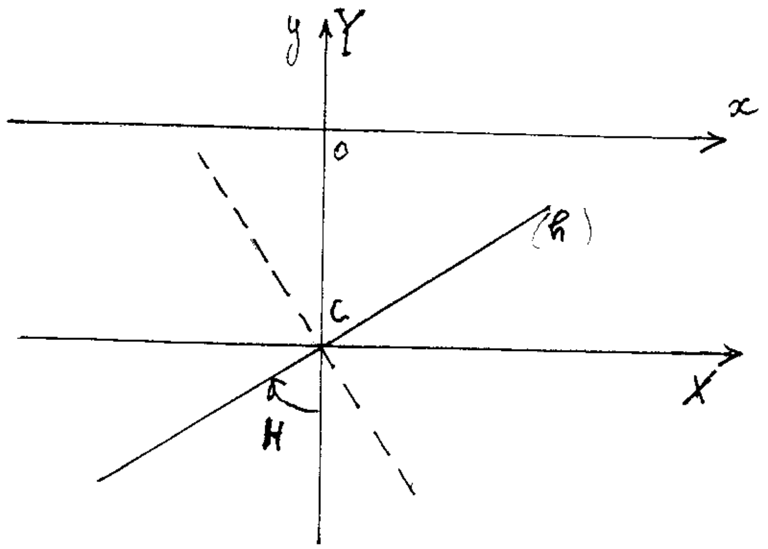

fig 3

obtient les égalités équivalentes :

$$M\{ \quad x = \frac{\sin H}{\sin\phi \ tg\delta + \cos\phi \cos H} \times l' \qquad y = \frac{\sin\phi \cos H - \cos\phi \ tg\delta}{\sin\phi \ tg\delta + \cos \phi \cos H} \times l$$

(la division par $\cos\delta$ est légitime, car, pour le Soleil on n'a jamais $\delta = 90°$)

Ces agélités conduisent à leur tour aux suivantes :

$$\{ \quad x(\sin\phi \ tg\delta + \cos\phi \cos H) = l' \sin H \qquad y(\sin\phi \ tg\delta + \cos\phi \cos H) = l(\sin\phi \cos H - \cos\phi \ tg\delta)$$

On en tire :

$$\{ \quad tg\delta = \frac{l' \sin H - x \cos\phi \cos H}{x \sin\phi} \qquad tg\ \delta = \frac{l \sin\phi \cos H - y \cos\phi \cos H}{y \sin\phi + l \cos\phi}$$ (avec la condition $\phi \neq 0$)

D'où par transitivité et par application des calculs sur les rapports égaux, l'égalité suivante, où δ ne figure pas :

$$(l' \sin H - x \cos\phi \cos H)(y \sin\phi + l \cos\phi) = x \sin\phi \ (l \sin\phi \cos H - y \cos\phi \cos H)$$

Après disparition du "terme rectangle" $-xy \sin\phi \cos\phi \cos H$, il reste :

$$x - y \ tgH \left(\frac{l'}{l} \sin\phi\right) - l' \ tgH \cos\phi = 0$$

ce qui est l'équation d'une droite (ou plutôt d'une famille de droites).

Mais si l'on choisit le rapport $l/l' = \sin\phi$, l'équation paramétrique de ces droites prend une forme particulièrement simple :

$$(\Delta) : \quad x - y \ tgH - l' \ tgH \cos\phi = 0 \qquad \text{(paramètre, } m = tgH)$$

On voit que ces droites ont pour pente $1/tgH$, où n'apparaît plus que l'angle horaire du Soleil, c'est à dire l'heure solaire vraie. ette circonstance facilite grandement leur tracé, qui devient presque immédiat. Nous allons d'ailleurs donner à l'équation des lignes horaires une forme réduite encore plus simple.

c) Equation réduite des droites horaires.

Ecrivons l'équation (Δ) sous la forme suivante :

$$x - tgH(y + l'\cos\phi) = 0$$

Elle est vérifiée pour tout H, si et seulement si, on a simultanément

$$C \quad (x = 0 \text{ et } y = -l'\cos\phi)$$

Ainsi les droites horaires forment-elles un faisceau de droites concourantes (rappelons la condition du calcul $\phi \neq 0$), ayant C pour sommet.

Il est alors possible et commode d'en rapporter l'équation à un nouveau repère $(C,\vec{i},\vec{j})$ déduit du repère initial $(O,\vec{i},\vec{j})$ par la translation de vecteur directeur $\vec{OC}$. Les formules de changement d'axes étant :

$$x = 0 + X \quad \text{et} \quad y = -l' \cos\phi + Y$$

Il en résulte l'équation réduite des droites :

$$(h) : \quad X - Y \ tgH = 0 \quad \text{ou } Y = X \ cotgH$$ (fig. 3)

qui permet de les tracer très simplement. Il est alors évident que les "heures rondes" correspondant à des multiples de 15° pour H sont régulièrement écartées (de 15° en 15°).

5. TRACE DES LIGNES HORAIRES

a) Selon l'usage, on trace les droites qui marquent les heures rondes, les demies, etc, en donnant à l'angle horaire du Soleil ou temps solaire vrai les valeurs H : 0°, 15°, 30°, ...(post méridien, PM). Pour les heures qui précèdent le midi vrai (local), (ante méridien, AM), on prend pour H les valeurs -15°, -30°, etc que l'on marque ordinairement XI, X, etc

On sait que les astronomes, les navigateurs, etc , mesurent l'angle horaire en heures, selon la convention que 360° = 24 heures, donc 15° = 1 heure ; etc... Mais il importe d'insister sur le fait que H est un angle et non une durée, en dépit du mot ambigu "heure" que lui attribue cette convention. Cependant on peut admettre que H varie linéairement avec le temps, en raison de la quasi-uniformité du mouvement diurne ; si bien que, finalement, le mot "heure" n'est pas inadapté.

Cela dit, le cadran bifilaire donne l'angle horaire du Soleil ou temps solaire vrai, comme la plupart des cadrans ordinaires, par lecture directe. On pourrait, moyennenant certains artifices, lui faire donner l'heure légale mais alors les lignes horaires ne seraient plus des droites et le cadran perdrait sa qualité essentielle, c'est à dire la simplicité.

On a déjà remarqué que les lignes rondes se succèdent régulièrement de 15° en 15° et que celles du matin (AM) sont symétriques des heures corespondantes de l'après-midi (PM) par rapport à la méridienne qui porte l'heure de midi (XII). Remarquons aussi que la ligne VI-XVIII est perpendiculaire à la méridienne.

b) Epure du cadran. On donnera au cadre du cadran une ampleur convenable. Pour tracer les droites horaires, il sera commode de subdiviser un cercle de centre C en arcs de 15°, à la règle et au compas (construction classique). Enfin, on ne tracera ces droites que jusqu'aux heures extrêmes, calculées pour le jour le plus long à la latitude ϕ comme on le fait pour les cadrans horizontaux ordinaires.

6. CADRANS BIFILAIRES SPECIAUX

On pourrait envisager un cadran vertical non déclinant, sur le même principe sans faire d'autres calculs que le remplacement de ϕ par $\pi/2 - \phi$ dans ceux que l'on vient de faire. Il faudrait alors prendre $l/l' = \sin(\pi/2-\phi) = \cos\phi$. Et le centre C du cadran serait défini par C (O, $-l\sin\phi$) sur la verticale descendante. Mais un tel cadran ne bénéficie pas du même ensoleillement que son homologue horizontal.

Pour un cadran vertical déclinant, il faudrait tenir compte de la déclinaison gnomonique. Mais c'est une autre affaire, conduisant à coup sûr à un écheveau de calculs passablement inextricables. Nous ne parlerons pas, non plus, des cas de l'équateur (ϕ=0°) ou du pôle sans grand intérêt ni véritable originalité.

7. COMPLEMENTS (sur un exemple particulier).

Application de l'algorithme des fractions continuées au calcul du rapport $l/l' = \sin\phi$ et à la détermination du centre du cadran.

Lieu : Nice (Observatoire du Mont Gros)

ϕ = 43°44' ; sin ϕ = 0,6 913 028 994

a) Algorithme d'Euclide :

10 000 000 000	=	6 913 028 994	× 1 +	3 086 971 006
6 913 028 994	=	3 086 971 006	× 2 +	793 086 982
3 086 971 006	=	739 086 082	× 4 +	130 623 078
739 086 982	=	130 623 078	× 5 +	85 971 592
130 623 078	=	85 971 592	× 1 +	44 651 486
85 971 592	=	44 651 486	× 1 +	41 320 106
44 651 486	=	41 320 106	× 1 +	3 331 380
41 320 106	=	3 331 380	× 12 +	1 343 546

....

b) Tableau des réduites. (Cf Jean Itard, **Arithmétique et théorie des nombres**, Que sais-je ?)

	1	2	4	5	1	1	1	12	......
0 1...	1	3	13	68	81	149	230	28669	
1 0...	1	2	9	47	56	103	159	19819	
α = 43° ...			48' 47"	43' 23"	44' 15"	43' 52"	44' 00"		

D'où les approximations rationnelles irrédictibles pour sin Φ, par excès et par défaut alternativement :
1/1 ; 2/3 ; 9/13 ; 47/68 ; 56/81 ; 103/149 ; 159/230 ; 19819/28669 ; ...
α désigne l'angle dont le sinus a pour valeur la réduite correspondante.

c) Choix des longueurs l et l' : on choisira pour rapport l/l' l'une ou l'autre des réduites.
Par exemple, 159/230 représente, avec toute la précision possible, le sinus de α=43°44'00" égal à la minute près, à Φ. En prenant, par exemple, l = 159 mm et l' = 230 mm, on trouverait sans peine la position du centre C du cadran, on obtiendrait pour ordonnée de C : y = - 166,18 mm soit à très peu près -166 mm. Il est inutile de dire que ce luxe de précision ne correspond pas aux possibilités réelles du cadran ; ce n'est qu'un exercice de style qui montre quand même la puissance de ce bel algorithme.

8. ARCS DES SIGNES

a) Généralités : En admettant que la déclinaison δ du Soleil reste constante tout au long d'une journée, on peut se proposer de tracer, sur la table du cadran, la courbe $\Gamma(\delta)$ qu'y décrit le "point d'ombre" M, ce jour-là ; on obtient ainsi ce que l'on nomme parfois un arc de déclinaison. Mais, selon un usage ancien en gnomonique, on n'y représente, en fait, que les courbes nommées encore aujourd'hui arcs des signes, en souvenir d'une époque, hélas nullement révolue, où l'astrologie interférait avec l'astronomie. Ces arcs correspondent à peu près à l'entrée du Soleil dans les signes du Zodiaque et, en particulier aux solstices et aux équinoxes. Pour les arcs des solstices, on prend δ = +/- 23°26' et pour les équinoxes δ = 0° ; pour les autres arcs, on jumelle les valeurs de la déclinaison en lui donnant +/- 11°29' et +/- 20°20'. Cela fait en tout six arcs proprement dits et une ligne droite, appelée équinoxiale. Cette droite qui correspond à la déclinaison nulle du Soleil, est perpendiculaire à la ligne de midi. Elle porte à sept le nombre des arcs des signes.

b) Nature des arcs $\Gamma(\delta)$: On pourrait en faire l'étude du point de vue de la géométrie analytique, à partir des coordonnées paramétriques de M, en y faisant varier H, une fois (Φ, δ, l) fixés. Et l'on verrait que ce sont des arcs de coniques dont le genre dépend de Φ, sous nos latitudes ce sont des arcs d'hyperboles. Nous nous en tiendrons à l'énoncé de ce résultat global sans entrer dans le détail du calcul et de la discussion.

c) Tracé pratique : Pour tracer les arcs $\Gamma(\delta)$ point par point, on met d'abord en place le faisceau des droites horaires qui convergent au centre C du cadran, comme on l'a vu. Soit (h) l'une de ces droites associée à la valeur H de l'angle horaire. La parallèle à Oy (D), d'abscisse x, coupe (h) en D. Or l'abscisse de D est fonction de δ seulement, une fois fixés (l',Φ et H), comme cela résulte de l'expression des coordonnées de M dont D n'est qu'un cas particulier. Ainsi, la valeur numérique de l'abscisse de D, pour les valeurs des paramètres en cause (H, Φ, δ, l') conduit-il à la construction de ce point qui appartient à $\Gamma(\delta)$ (Fig.5)
Equation de l'équinoxiale (E) : $y = l \operatorname{tg}\Phi$

(Nice, le 30 avril 1993)

* Michnik H., **Theorie einer Bifilarsonnenhur** (Astronomische Nachrichten, volume 216, Berlin 1923). Cité par R.J.Rohr, **Les Cadrans solaires** (éd Oberlin, Strasbourg 1986) pp 163 et 164 mais sans développement de la théorie dont l'auteur de cette référence donne cependant la photographie d'un beau spécimen de cadran bifilaire.

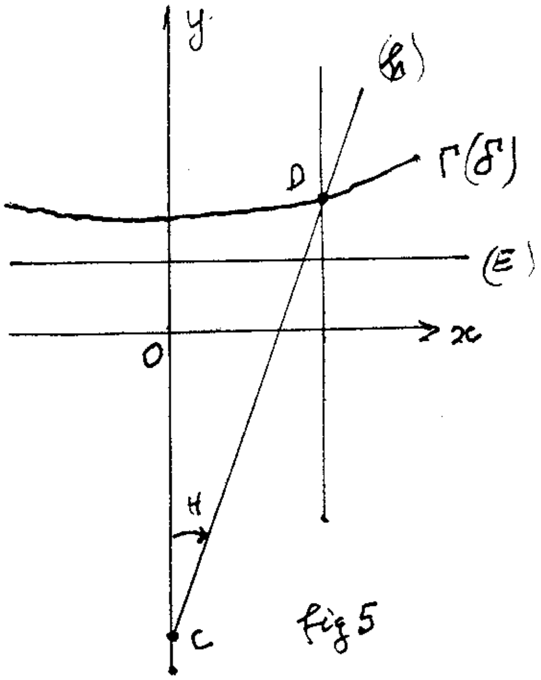

fig 5

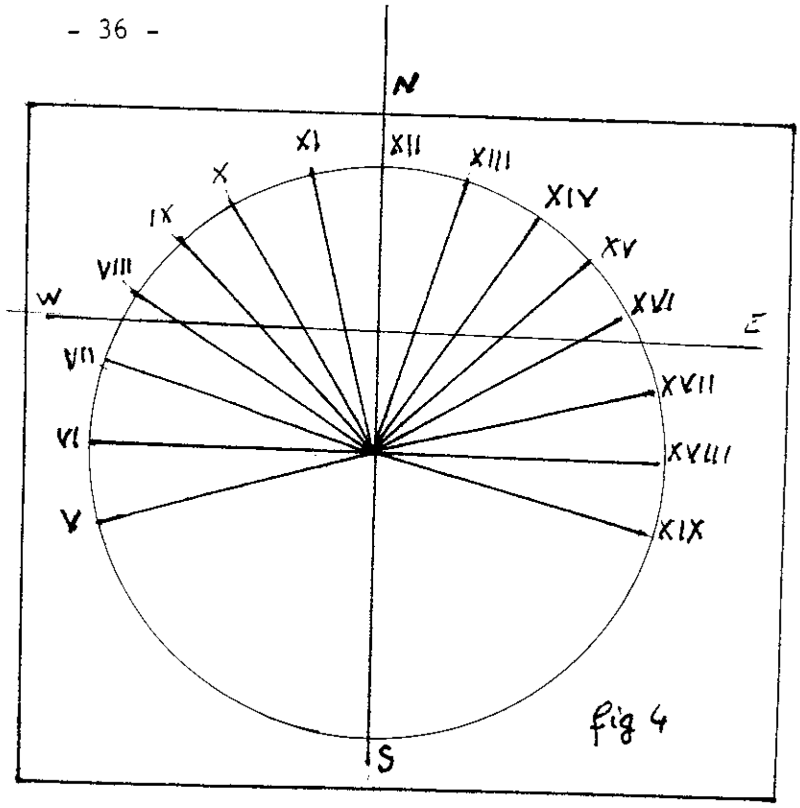

fig 4

Une page de Kepler

La vérité est fille du temps, et je n'ai pas honte de lui servir de sage-femme, pour prouver ainsi que mon jugement sur le foetus n'était pas vain et pour délivrer les autres de leur inquiétude quant à l'issue de la gestation...

Ainsi donc, au matin du 30 août 1610, j'observai Jupiter entre les nuages, en présence de Benjamin Ursinus, passionné d'astronomie et qui, parce qu'il aime cet art et a décidé de le pratiquer en spécialiste, ne songe nullement à ruiner dès le début par quelque faux témoignage le crédit nécessaire à un futur astronome...

Nous observâmes Jupiter à son lever et nous réussîmes pour la première fois une observation indubitable et très belle des astres Médicées. Nous adoptâmes la méthode suivante : chacun de nous dessinait à la craie sur un mur hors de la vue de l'autre, ce qu'il avait pu observer, ensuite nous allions au même moment regarder chacun le dessin de l'autre, pour chercher s'il y avait accord... Nous sommes sûrs de trois satellites, pour le quatrième, obscur, qui était plus près de Jupiter, nous avons eu des doutes, et Ursinus plus que moi. Nous en avons vu très clairement deux à l'ouest, presque contigus, jusqu'à ce que l'aurore soit bien avancée. Alors pour finir il n'y en avait certainement plus que deux de visibles, et non trois....

Extrait de **Rapport sur ses observations des quatre satellites de Jupiter** par Johannes Kepler, traduction par Isabelle Pantin (édition Les Belles Lettres 1993)