A propos de la période julienne

Paul Perbost

1. Aspect historique et utilisation actuelle

Pour faciliter le calcul du nombre de jours écoulés entre deux époques, l'érudit français Joseph Scaliger (1540-1609) a proposé d'utiliser une période de 7980 années juliennes comme nouvelle échelle chronologique (*Opus novum de Emendatione Temporum*, 1583) que l'on nomme précisément période de Scaliger ou encore, selon l'usage des Ephémérides astronomiques actuelles, période julienne. Cette ère commence **arbitrairement** le lundi 1er janvier, à midi, de l'an 4713 avant J.-C., c'est à dire -4712 (puisque l'année 0 n'existe pas dans la chronologie ordinaire).

Elle se substituait avantageusement aux multiples et disparates systèmes chronologiques utilisés concurremment jusque là (les Olympiades, l'ère de la fondation de Rome, de Nabonassar, césarienne d'Antioche, actiaque, d'Espagne, d'Alexandrie, de Constantinople, de l'Hégire, etc...). On dit que Kepler goûtait beaucoup l'idée de Scaliger (Paul Couderc, **Le Calendrier**, Que sais-je? n°203, p.100). D'ailleurs l'astronomie moderne s'y réfère encore. En effet, "cette période où les jours sont numérotés de façon ininterrompue est utilisée pour dater les observations photométriques d'étoiles variables , les mesures des vitesses radiales des étoiles doubles spectroscopiques, et, d'une manière générale, toutes les observations se rapportant à des phénomènes pratiques à courte durée", quitte à exprimer les fractions de jour écoulées depuis le midi moyen de Greenwich en fractions décimales (cf A.Danjon, **Astronomie générale**, p.115). D'autre part, "le décompte des jours en date julienne est de plus en plus employé dans la vie courante (sous une forme modifiée) car il se prête bien à l'emploi dans les machines comptables. Aux Etats-Unis, en particulier, il est fréquent que les calendriers communs portent la date julienne, ou la date julienne modifiée par la soustraction de 2 400 000,5 "(Guinot, **La mesure du temps**, Que sais-je ? N°97, p.122). L'Annuaire du Bureau des Longitudes indique d'ailleurs que l'usage du jour julien modifié (en anglais modified julian date, MJD), commode pour de nombreux besoins astronomiques, a été reconnu par l'Union Astronomique Internationale en 1973.

Tel auteur contemporain, qui n'est pas tendre envers "les astronomes de la vieille école, traditionnellement attachés aux J.J." (jours juliens), s'afflige de la survivance de la période julienne même sous sa forme modifiée, ce qui témoigne selon lui d'une grande "indigence d'esprit", tandis qu'il propose lui-même une notation qui n'est qu'un produit allégé, qui procède directement des élucubrations de Scaliger revues et corrigées. Son souhait vigoureux de substituer aux "dates juliennes" ce qu'il appelle "les numérants" à la place de "leur pauvre nom de MJD" ne renie pas, au fond, cette lointaine filiation. Enfin, déclare-t-il, "la période de Scaliger exhumée par Sir John Herschel (fils de William) en 1849 ne mérite que l'oubli" ; quant à "l'origine du 4712" dit-il encore, "elle est bien compliquée et nous n'en dirons rien". (Maurice Danloux-Dumesnils, **Eléments d'astronomie fondamentale**, éd Blanchard 1985, pp 102 et sq).

Laissons aux chronologistes le temps d'accorder leurs violons, fussent-ils d'Ingres. Mais, d'un autre point de vue, la dernière remarque de cet auteur critique, pose au moins un problème mathématique qui n'est pas dénué d'intérêt. Gauss lui-même n'a pas dédaigné de lui consacrer quelques lignes, à titre d'application de sa brillante théorie des congruences arithmétiques. Naturellement, son oeuvre magistrale se situe à une autre hauteur, bien qu'il l'eût achevée avant ses vingt-cinq ans (**Recherches arithmétiques**, traduction française p.19, écrites d'abord en latin sous le titre **Disquisitiones Arithmeticae**, en 1802). Nous rechercherons donc "l'origine du 4712", malgré sa complexité, en utilisant uniquement la notation gaussienne des congruences.

2. Constitution de la période de Scaliger

Elle se fonde exclusivement sur la considération de trois éléments du comput julien : l'indiction, le nombre d'or et le cycle solaire. Sans nous attarder à définir ces éléments hétéroclites et encore bien moins sur les époques de leurs instaurations respectives, pour lesquelles les opinions des historiens de la chronologie divergent grandement, nous citerons quelques extraits d'un auteur du XVIII ème siècle sur ces questions passablement obscures. Les calculs qui suivent ne seront évidemment pas affectés par ces incertitudes historiques.

"On ne connaît pas bien l'origine des Indictions, ni pouquoi la révolution de leur cycle est fixée à 15 ans. Quelques auteurs en font remonter l'époque au temps de Constantin à l'an 312, d'autres plus tôt ou plus tard ; mais on n'a point de preuves... Selon la plus commune opinion, on a dû compter 1 d'indiction l'an 313 de J.-C.... D'après ce principe, la première année de notre ère doit répondre à la quatrième année du cycle des indictions" (p.172). Et selon le même auteur "la première année de notre ère avait 10 de cycle solaire et 2 de nombre d'or." (p.169) (M. de la Prise, **L'art de vérifier les dates, Principes et usages du comput** imprimé à Bayeux et se vend à Caen, MDCCLXXX)

En résumé, d'après ce document, en l'an 1 de notre ère (que par abus de langage nous appellerons l'an 1 après J.-C.), les nombres de comput considérés avaient pour valeurs :
An 1 : a = 4 (Indiction) ; b = 2 (Nombre d'or); c = 10 (Cycle solaire)
Nous retrouverons ci-après ces notations et ces valeurs.

3. Méthode de calcul de la période de Scaliger

α) Données du problème

L'indiction, le nombre d'or et le cycle solaire ont des valeurs annuelles (que nous désignerons par a, b et c) se succédant à l'intérieur de trois cycles de périodes respectives : A = 15 ; B = 19 ; C = 28 (notations de Gauss) exprimées en année juliennes. Ainsi :
$1 \leq a \leq 15$; $1 \leq b \leq 19$; $1 \leq c \leq 28$

Les nombres a, b et c figurent sur l'almanach du facteur, en bas de la colonne de février. Pour n'année 1993, par exemple, on y lit : a = 1 ; b = 18 ; c = 14

β) L'idée de Scaliger

Sur l'exemple précédent, aussi bien que celui de M.de la Prise, on voit que les trois nombres annuels sont différents. D'autre part, pour 1993, a = 1, c'est à dire que cette année est le début d'un nouveau cycle d'indiction. On peut alors se demander s'il existe une année où les trois nombres sont simultanément égaux à 1 c'est à dire tels que a = b = c = 1.

Autrement dit, il s'agit de déterminer un millésime qui coïnciderait à la fois avec le commencement des trois cycles. On le prendrait alors pour origine d'une ère qui se reproduirait périodiquement dans un laps de temps à déterminer. Telle fut l'idée de Scaliger. On peut évidemment la trouver saugrenue, en raison de l'étrange assemblage d'éléments hétéroclites auxquels elle se réfère. Mais c'est un fait historique. Nous ne l'examinerons que sous son aspect mathématique, après avoir exposé les principes de la méthode de calcul utilisée.

γ) Le théorème chinois

Il s'agit maintenant de situer l'origine de la période de Scaliger dans la numérotation ordinaire des années du calendrier et de fixer la durée de son cycle.

A cet effet, nous utiliserons une méthode de résolution d'un système de congruences arithmétiques, fondée sur un théorème que l'on démontre en théorie des nombres et que nous admettrons. Il est connu sous le nom de Théorème chinois. En voici l'énoncé :

"Si les nombres m_1, m_2,...., m_r sont premiers entre eux, les congruences simultanées

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$
$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$
$$\cdots\cdots$$
$$x \equiv a_r \pmod{m_r}$$

ont toujours une solution définie de manière unique, selon le module $M = m_1 m_2 \ldots m_r$.
Elle est donnée par la congruence

$$x \equiv a_1 b_1 \frac{M}{m_1} + a_2 b_2 \frac{M}{m_2} + \ldots\ldots + a_r b_r \frac{M}{m_r} \pmod{M}$$

où les nombres b_1, b_2, ... , b_r, sont tels que

$$b_1 \frac{M}{m_1} \equiv 1 \pmod{m_1}\ ;\ b_2 \frac{M}{m_2} \equiv 1 \pmod{m_2}\ ;\ \ldots\ ;\ b_r \frac{M}{m_r} \equiv 1 \pmod{m_r}$$

Selon Wright et Hardy, ce théorème était connu du mathématicien chinois Sun-Tsu, qui aurait vécu au premier siècle (**An introduction to the theory of numbers**, p.106), d'où son nom. Plus tôt encore, on trouve de tels problèmes chez Brahmagupta à propos de cycles planétaires. Les applications du théorème chinois vont bien au-delà de la chronologie (Cf Oystein Ore, **Number Theroy and its history**). Ces auteurs donnent évidemment la démonstration détaillée du théorème.

4.Application du théorème chinois au problème de Scaliger

Puisque les trois cycles du comput se sont déroulés sans interruption dès l'origine de la période julienne, nous ne diminuerons pas la généralité du problème en prenant pour leurs valeurs respectives celles qui figurent dans les calendriers d'aujourd'hui. C'est ainsi que l'on trouve :

a = 1 (Indiction), en 1993
b = 1 (Nombre d'or), en 1976
c = 1 (Cycle solaire), en 1980

Or, les restes des divisions de ces millésimes par 15, 19 et 28 sont respectivement 13, 0 et 20. D'où les congruences :

$$1993 \equiv 13 \equiv -2 \pmod{15}$$
$$1976 \equiv 0 \pmod{19}$$
$$1980 \equiv -8 \pmod{28}$$

Les trois modules, premiers entre eux, ont pour produit

$$M = 15 \times 19 \times 28 = 7980\ ;$$

on a ensuite $\frac{M}{15} = 532$; $\frac{M}{19} = 420$; $\frac{M}{28} = 285$

On détermine alors les nombres b_1, b_2, b_3 tels que

$532\ b_1 \equiv 1 \pmod{15}$; $420\ b_2 \equiv 1 \pmod{19}$; $285\ b_3 \equiv 1 \pmod{28}$

On trouve ainsi : $b_1 = 13$; $b_2 = 10$; $b_3 = 17$

(Le détail de la résolution de ces congruences figure en annexe)

D'où, par application du théorème chinois :

$$x \equiv (-2)\times 13 \times 532 + (0)\times 10 \times 420 + (-8)\times 17 \times 285 \pmod{7980},$$

soit $x \equiv -52592 \pmod{7980}$

En cherchant enfin le reste de 52592 par 7980, qui est 4712 on arrive à
$x \equiv -4712 \pmod{7980}$, soit $x = -4712 + 7980\ k$

Pour $k = 0$, on a $x = -4712$, ce qui correspond à l'année 4713 avant J.-C. retenue par Scaliger. On voit, de plus, que la période de son ère est de 7980 années juliennes. L'ère recommencera en $7980 - 4712 = 3268$; etc...

Annexes

Résolution des équations auxiliaires :

$$532\, b_1 \equiv 1 \pmod{15}\ ;\ 420\, b_2 \equiv 1 \pmod{19}\ ;\ 285\, b_3 \equiv 1 \pmod{28}$$

elles sont de la forme générale $ax - by = 1$, où a et b sont premiers entre eux (équation de Bachet de Méziriac dite aussi de Bezout). L'algorithme d'Euclide, et celui des fractions continuées qui en découle, donne systématiquement la solution.

a) $532\, b_1 \equiv 1$ (mod 15 équivaut à $532 b_1 - 15y = 1$

Or, l'algorithme d'Euclide donne : $532 = 15\times35 + 7$

$15 = 7\times2 + 1$

$7 = 1\times7$

d'où les réduites

		35	2	7
0	1 ..	35	71	532
1	0 ..	1	2	15

L'avant dernière réduite donne la solution particulière $b_0 = -2$ et $y_0 = -71$; en effet

$532(-2) - 15(-71) = -1064 + 1065 = 1$

On en déduit : $b = -2 + 15k$ qui pour $k = 1$ donne $b_1 = 13$

b) $420 b_2 \equiv 1 \pmod{19}$; on trouve de même $b_2 = 10$

c) $285 b_3 \equiv 1 \pmod{28}$; on trouve de même $b_3 = 17$

(Cf Jean Itard, **Arithmétique et théorie des nombres**, coll. Que sais-je ? 1093, chap V)

COMPLEMENTS

1°) Les valeurs du comput pour l'an 1 de notre ère, selon M de la Prise, $a = 4$, $b = 2$, $c = 10$ conduisent aux conséquences que $a = 1$ en l'an 13, or $13 \equiv -2 \pmod{15}$; $b = 1$ en l'an 19, or $19 \equiv 0 \pmod{19}$; $c = 1$ en l'an 20, or $20 \equiv -8 \pmod{28}$.

On arrive au même système que ci-dessus :

$$x \equiv -2 \pmod{15} \text{ et } x \equiv 0 \pmod{19} \text{ et } x \equiv -8 \pmod{28}$$

2°) J-Parisot et F.Suagher dans **Calendriers et Chronologie** , p.58, disent que Scaliger est parti des données suivantes :

$a = 1$ en 3 avant J-C. c'est à dire en l'an -2

$b = 1$ en 532 (congru à 0 mod 19)

$c = 1$ en 1560 (congru à -8 mod 28)

On retrouve le même système de congruences, mais leurs calculs, quoique non explicités, sont plus courts que ceux qui précèdent.