LECTURE DE PTOLEMEE (2)

La lecture des deux premiers livres de l'Almageste nous avait laissés sur notre faim. Il avait fallu se familiariser avec un style d'un autre âge et pour un profit minime. Si bien que j'hésitais à poursuivre cette lecture. Je l'ai pourtant reprise, ne voulant pas m'avouer vaincu par la difficulté et, cette fois, je crois que les efforts pour décrypter le style et les méthodes de Ptolémée nous apportent un réel enseignement. Sans compter le plaisir qu'il y a toujours à remettre les pas dans les pas d'un savant des temps anciens. Je me rappelle à ce sujet la remarque d'un professeur de dessin qui était aussi un très bon peintre : "Ce n'est pas en peignant d'après nature que vous égalerez Monet ou Turner, c'est en étudiant de près leurs tableaux". Cela ne signifie pas qu'il suffit de lire Ptolémée, Galilée et Einstein sans jamais regarder le ciel pour devenir savant. Au contraire, en relisant Ptolémée, on éprouve l'impérieux besoin d'observer "pour de vrai" ce qu'il schématise.

Nous reprenons donc la lecture au livre III consacré tout entier à la théorie du Soleil, c'est à dire à l'étude de son mouvement apparent. Pour Ptolémée, c'est un préalable à l'étude du mouvement de la Lune et des planètes. Nous allons voir que c'en est une execellente introduction.

LA DUREE DE L'ANNEE

C'est une donnée d'observation qui est fondamentale. Encore faut-il s'entendre sur la signification du mot "année". On pense qu'une année se sera écoulée quand le Soleil aura fait un tour sur l'écliptique en revenant à un point fixé.

Cela paraît sans ambiguïté. Pourtant Hipparque a montré - Ptolémée le cite - que si on prend comme point de repère le point vernal, le retour à l'équinoxe de printemps, l'année vaut 365 jours plus un peu moins d'un quart de jour. Alors que si on prend comme repère du départ une certaine étoile, on retrouve le Soleil auprès de cette étoile après 365 jours plus un peu plus d'un quart de jour.

Quelle valeur choisir ? Ptolémée reprend les mesures de Hipparque, tente comme lui de considérer la durée écoulée d'un solstice d'été au suivant. Non, c'est encore plus difficile que de bien repérer l'instant d'un équinoxe. Là, en principe, il suffit de disposer d'un plan parallèle au plan de l'équateur : le jour de l'équinoxe, la face éclairée change. (Entre nous, c'est plus facile à dire qu'à observer !)

Conclusion, Ptolémée opte, comme l'avait fait Hipparque, pour le retour au point vernal. Cependant, il rappelle que Hipparque s'était demandé si la durée de l'année ne variait vraiment pas. En utilisant des dates d'éclipses à des périodes assez lointaines (les éclipses ont toujours été soigneusement observées), Hipparque écartait finalement l'idée d'une variation de la durée de l'année. Ptolémée reprend cette conclusion, ce qui est raisonnable eu égard à la précision que les observateurs d'alors pouvaient atteindre.

Remarque : aujourd'hui, nous savons que d'un équinoxe de printemps au suivant s'écoule une "année des saisons" dont la durée oscille autour de la valeur moyenne, celle de l'année tropique soit 365,2422 jours. Exemple, entre l'équinoxe de printemps 1990, le 20 mars, et celui de 1991, le 21 mars, il se sera écoulé une durée de 365,237 jours soit environ 7,5 minutes de temps de moins que la moyenne. Cela ne signifie pas que la Terre a galopé sur son orbite mais seulement qu'en batifolant avec la Lune elle a un peu avancé l'équinoxe sur l'horaire moyen.

Considérant qu'en une année de 365,25 jours, le Soleil a décrit un tour d'écliptique, Ptolémée calcule son moyen mouvement et dresse des tables par périodes de 18 années (sans que les raisons de ce choix de 18 soient parfaitement claires), puis par année, par mois, par jour et par heure.

Il se sent alors capable d'étudier le mouvement apparent réel car c'est là le vrai problème qui l'intéresse : comment expliquer avec un mouvement circulaire et uniforme un mouvement qu'on admet toujours circulaire mais qui n'est certainement pas uniforme, l'observation le montre.

SUR L'HYPOTHESE DES MOUVEMENTS CIRCULAIRES ET UNIFORMES

Depuis Platon et Eudoxe, il est convenu que le mouvement circulaire et uniforme donne l'image de la perfection, qu'il peut se perpétuer sans impulsion, qu'il est donc le seul à convenir pour rendre compte des phénomènes célestes observés ou, comme on dit alors, "pour sauver les phénomènes". Ptolémée adopte cette façon de penser sans la discuter mais comme il sait que les mouvements observés n'ont pas cette belle ou idéale régularité, il se propose d'étudier en général les modèles qu'on peut imaginer pour sauver les phénomènes dans ce cadre théorique.

C'est ici que son idée de commencer par le Soleil est bonne : le mouvement apparent est plus simple que celui de la Lune ou a fortiori d'une planète. Mais son exposé, dans le troisième chapitre du livre III est tout théorique, une belle théorie géométrique pour exposer ce que nous appellerons le modèle excentrique et le modèle épicycle et montrer leur équivalence. Il n'emploie pas le mot "modèle", mais je rappelle au lecteur que si j'essaie de remettre les pas dans les pas de Ptolémée, cela ne signifie pas que je reprenne mot à mot ses expressions, ses notations et ses façons de calculer. J'adapte et si possible je simplifie. Ptolémée ne facilite pas la lecture, d'une figure à l'autre, il change ses notations, ici l'observateur est le point Z, là le point D, l'astre observé B , ailleurs Z, etc. Je fais tous mes efforts pour être fidèle au sens du texte, non à sa lettre ; par exemple, pour les calculs, je m'en tiens à l'usage exclusif de la numération décimale, aussi bien pour les durées que pour les angles et nous admettrons qu'on peut écrire aussi bien 365,25 que 365.25 jours.

Commençons par la présentation des deux modèles.

Dans le modèle de l'excentrique, l'astre M décrit uniformément le cercle de centre J non confondu avec le centre O de la sphère céleste. O est donc l'observateur. Le rapport de la distance OJ au rayon du cercle est l'excentricité. Le diamètre OJ coupe le cerle en A et D ; A est l'apogée, D le périgée.

Au sens actuel, apogée signifie distance maximale à la Terre, périgée distance minimale. Ici, pas question de distances, cela signifie que près de A, l'astre avance moins vite, que près de D il avance plus vite. Ce que Ptolémée démontre en prenant deux positions M et M' de l'astre telles que $\widehat{AJM} = \widehat{M'JD}$; alors $\widehat{AOM} < \widehat{AJM}$ et $\widehat{M'OD} > \widehat{M'JD}$.

Dans le modèle de l'épicycle, le centre O de la sphère céleste, position de l'observateur, est le centre du déférent, le cercle que décrit uniformément le centre K de l'épicycle. L'astre M est à l'apogée quand il est en S, au périgée quand il est en Q. Ptolémée ignore la composition des vitesses, il pense que si l'astre est en P son mouvement sera plus rapide que celui de K sur le déférent, que le mouvement sera moins rapide quand il sera en R.

Ptolémée reconnaît qu'avec l'excentrique, on a toujours mouvement plus lent à l'apogée, mouvement plus rapide au périgée. Tandis qu'avec l'épicycle on peut s'arranger pour avoir l'un ou l'autre. On a

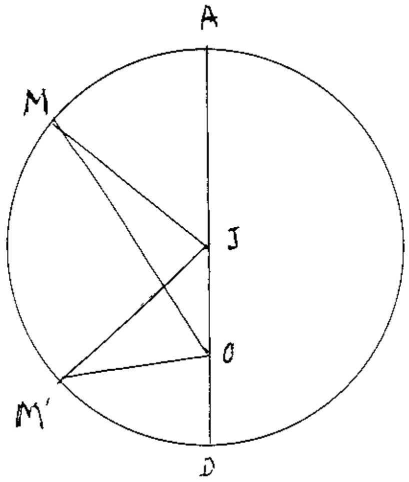


fig 3.1.

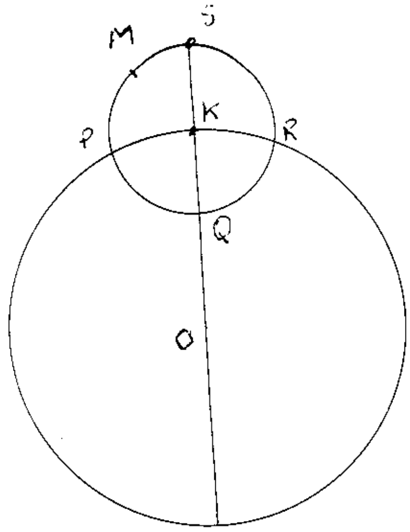


fig 3.2.

bien envie de lui souffler "le modèle excentrique est le meilleur". Lui, il continuera à présenter les deux modèles, montrera qu'ils s'accordent et peuvent même se conjuguer. Pour lui ce ne sont que des modèles explicatifs, ils ne sont pas la réalité.

Entendons nous, avant d'aller plus loin, sur les noms à donner aux angles que nous devrons manipuler. Je reprends la terminologie actuelle. Le rayon JM tourne uniformément ; l'arc AM décrit par l'astre depuis son apogée est son anomalie moyenne, autrement dit, pour le Soleil, son moyen mouvement. L'angle AOM qui représente le déplacement du Soleil depuis l'apogée vu par l'observateur est l'anomalie vraie (fig 3.3.).

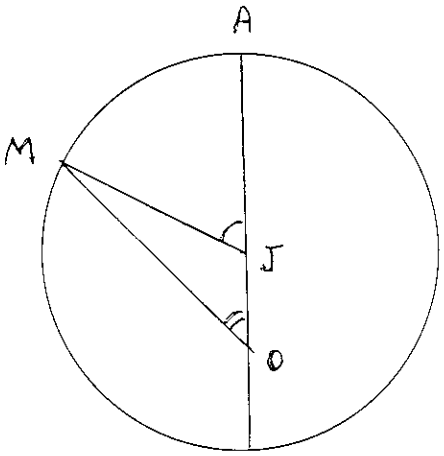


fig 3.3.

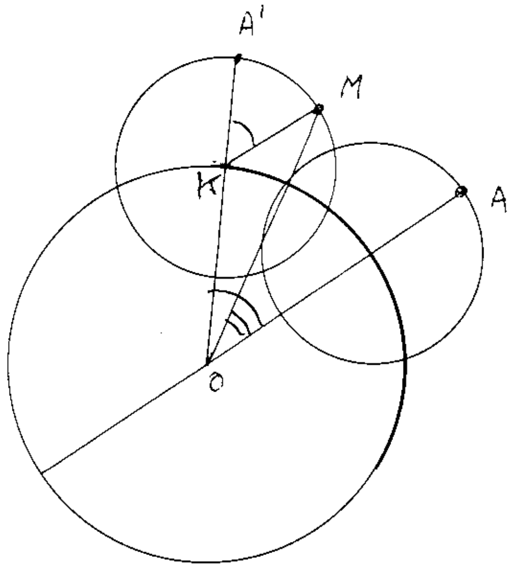


fig 3.4.

Dans le modèle épicycle (fig 3.4.) $\widehat{AOK}$ est l'anomalie moyenne, $\widehat{AOM}$ l'anomalie vraie.

Ptolémée nous propose alors son premier théorème : soient B ou D les positions du Soleil à un quadrant de l'apogée ; ce sont les positions du Soleil qui correspondent à la plus grande différence entre anomalie vraie et anomalie moyenne.

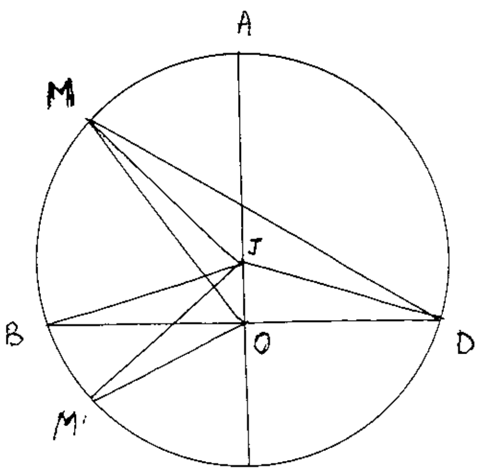


fig 3.5.

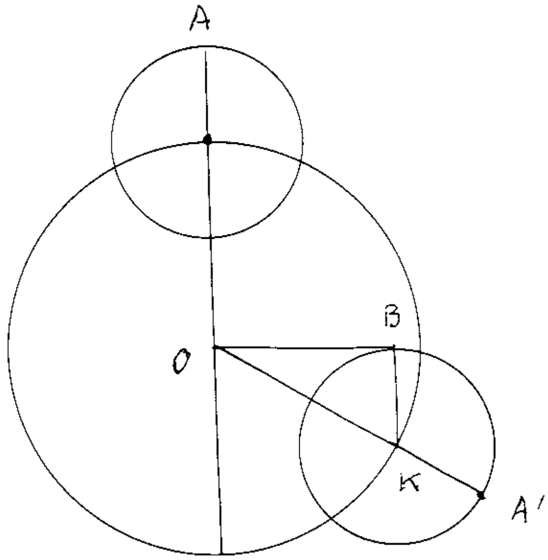


fig 3.6.

Sur le modèle de l'excentrique (fig 3.5.), l'anomalie vraie $\widehat{AOB}$, la moyenne $\widehat{AJB}$, leur différence est $\widehat{OBJ}$. Pour l'astre en M, anomalie moyenne $\widehat{AJM}$, anomalie vraie $\widehat{AOM}$, différence $\widehat{OMJ}$. Traçons MD ; MD > MO donc de même pour les angles $\widehat{MDO}$ > $\widehat{OMD}$ et comme $\widehat{DMJ}$ = $\widehat{JDM}$, par soustraction $\widehat{JDO}$ > OMJ ou OMJ < OBJ, ce qu'on voulait démontrer. Pour l'astre en position M', démonstration semblable.

Sur le modèle de l'épicycle (fig 3.6.), AOB est l'anomalie vraie et AOK la moyenne ; leur différence est BOK qui est bien maximale lorsque OB est tangente à l'épicycle. Et alors AOB est égal à un quadrant puisque le mouvement de K sur le déférent et de l'astre M sur l'épicycle sont également uniformes avec la même vitesse angulaire.

Ptolémée montre ensuite que les deux modèles rendent également compte des phénomènes en nous proposant une nouvelle figure (fig 3.7.) superposant les deux schémas (même s'il introduit de nouvelles notations, ce que je me garde d'imiter). Voici ce schéma, il est fort séduisant.

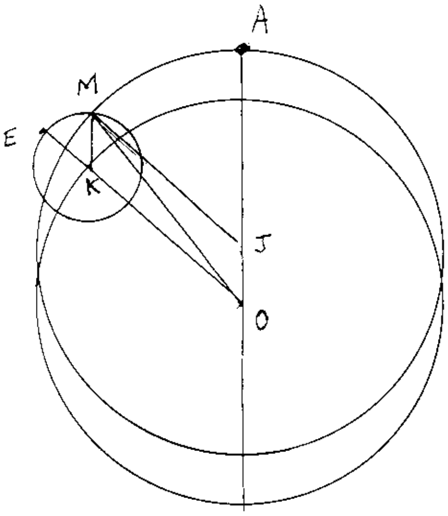


fig 3.7.

O figure toujours l'observateur, J le centre de l'excentrique. Celui-ci et le déférent de centre O ont même rayon ; le rayon de l'épicycle est égal à OJ.

Avec ces conventions de dessin, OKMJ est un parallélogramme.

$\widehat{AJM}$ = $\widehat{AOK}$ = $\widehat{EKM}$ = anomalie moyenne

$\widehat{AOM}$ = anomalie vraie.

$\widehat{MOK}$ différence des anomalies.

Deuxième théorème proposé par Ptolémée : si on prend deux positions de l'astre S et T telles que l'écart entre l'apogée et la position S soit égal à l'écart entre le périgée et la position T, alors dans les deux cas il y a la même différence entre anomalie moyenne et anomalie vraie.

Sur le modèle de l'excentrique, OS et OT sont alignés (fig 3.8.) ; de cette façon AOS, écart avec l'apogée, est égal à COT, écart avec le périgée. Quant aux différences des anomalies, ce sont les deux angles égaux du triangle isocèle JST. Ptolémée aimait visiblement la géométrie, Sur le modèle de l'épicycle, les écarts égaux avec apogée et périgée cela signifie que les positions S et T sont sur une même droite issue de O ; on retrouve un triangle isocèle KST (fig 3.9.) dont les angles égaux représentent dans chaque cas la différence des anomalies.

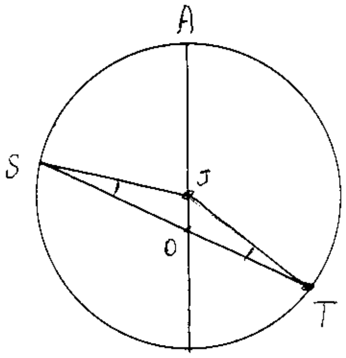


fig 3.8.

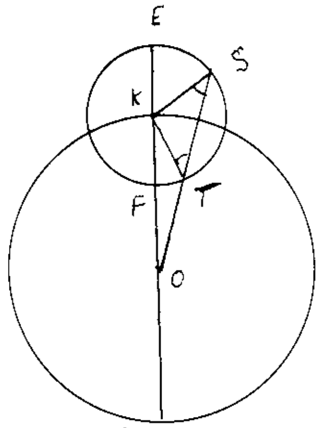


fig 3.9.

APPLICATION AU SOLEIL

L'irrégularité du mouvement apparent du Soleil est simple par rapport à ce que nous trouverons pour les planètes. Elle peut se résumer ainsi : le temps qui s'écoule entre le passage à l'apogée (où la vitesse est la plus faible) et le passage à la position où la vitesse est moyenne est toujours supérieur au temps qui s'écoule entre cette position à vitesse moyenne et le passage au périgée (où la vitesse est la plus grande). Irrégularité dont on peut rendre compte aussi bien par le modèle de l'excentrique que celui de l'épicycle. A cette différence près qu'avec le modèle de l'épicycle, le mouvement du Soleil à l'apogée serait un peu en avance. Il est certainement plus raisonnable de choisir le modèle de l'excentrique, c'est plus simple et cela n'introduit qu'un seul mouvement au lieu de deux. L'argument de simplicité est décisif et, comme on sait, ce ne sera pas sa dernière intervention dans l'histoire des sciences (comparez, en passant, avec ce qui se pratique dans les fausses sciences du genre astrologie et autres ésotérismes où quand c'est possible de faire simple, on complique à plaisir).

On se propose de déterminer l'excentricité et de placer la direction de l'apogée qui portera le centre de l'excentrique. Je reprends les mêmes notations que plus haut : O centre de la sphère céleste locale figure l'observateur, J est le centre de l'écliptique.

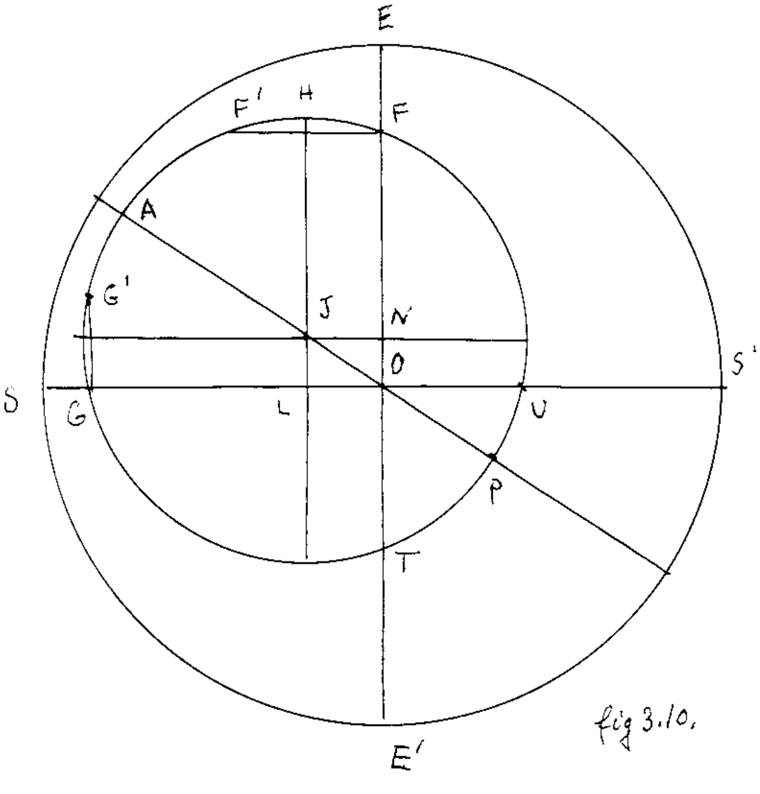


fig 3.10.

Du centre O du cercle figurant l'intersection de la sphère des fixes par le plan de l'écliptique, les directions perpendiculaires OE et OS figurent la direction du point vernal, passage du Soleil à l'équinoxe de printemps et passage du Soleil au solstice d'été, E' équinoxe d'automne,...

Ptolémée reprend les données de Hipparque que je traduis dans notre système de numération décimale
durée du printemps 94,5 jours
durée de l'été 92,5 jours
A ces durées, correspondent sur l'excentrique des arcs de 93°,14 et 91°,17 le mouvement du Soleil sur l'excentrique étant uniforme. Conclusion, l'arc FF'GT sur sur l'excentrique mesure 184°,31 la moitié de la corde FF' est

le sinus de 2°,16 soit environ 0,038 qui représente l'abscisse OL du centre de l'excentrique (le rayon de celui-ci étant pris pour unité).

L'arc FF'G'G sur l'excentrique est composé du demi arc FF' suivi d'un quadrant suivi du demi arc G'G, soit

$$93°,14 = 2°,16 + 90° + \text{arc } G'G/2$$

Ce dernier arc vaut donc 0°,98 et sin 0°98 = 0,017 qui est l'ordonnée ON ddu centre de l'excentrique. Dans le triangle OJL on peut alors calculer OJ qui est l'excentricité cherchée :

$$OJ = 0,04169$$

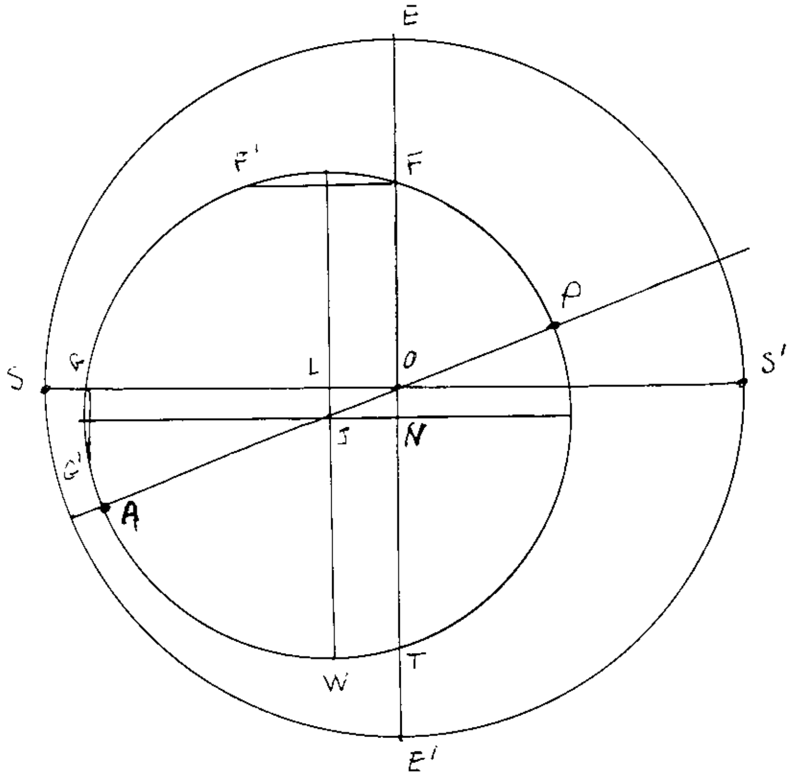
soit environ 1/24, guère plus que ce que trouvait encore Tycho Brahé (1/28).

Connaissant la position du centre J de l'excentrique, on connaît la direction OA de l'apogée :
cos LOA = 0,038/0,0417 soit LOA = 24°,3
ce qui signifie que le passage à l'apogée avait lieu un peu plus de 24 jours avant le solstice d'été. En comparant avec les résultats de Hipparque, Ptolémée a pu constater la lente variation de l'axe OJ, l'axe des apsides, ce que nous retrouverons plus loin.

D'après ces résultats, Prolémée cherche la position du Soleil qui donne un écart maximal entre anomalie vraie et anomalie moyenne (cf fig 3.5.). Avec OJ = 1/24 du rayon, OBJ = 2°,388 ; l'anomalie moyenne est alors 92°,388 ce qui advient 93,7 jours après le passage à l'apogée.

CALCULS PTOLEMEENS D'AUJOURD'HUI

Il m'a paru instructif de reprendre les calculs de Ptoléme avec les données des Ephémérides 1990 : durée du printemps 92,7592 jours et durée de l'été 93,6408 jours. Changement notable de la figure, l'été est devenu la saison la plus longue (ne pas croire que cette année l'été s'est dilaté sous effet de canicule !).



De l'équinoxe de printemps au solstice d'été, les 92,7592 jours correspondent sur l'excentrique à l'arc FF'G ; du solstice d'été à l'équinoxe d'automne 93,6408 jours qui correspondent à l'arc GG'T. Arc FGT=183°,71. Arc FF'=3°,71 dont la moitié a pour sinus 0,032 qui est l'abscisse OL de J.

L'arc GT correspond aux 93,6408 jours de l'été et vaut 92°,29 et comme l'arc WT = 1°,85 il reste 0°,44 pour l'arc GG'/2 dont le sinus est 0,0076 qui est l'ordonnée ON de J

Calcul de OJ = 0,0329 qui est bien peu approchée de la valeur donnée par les Ephémérides soit

$$e = 0,017$$

Orientation de l'axe des apsides: sin LOJ = 0,0076/0,0329 soit LOJ = 13°,35 qui indique un passage du Soleil à l'apogée environ 13,5 jours après le solstice (le solstice ayant eu lieu le 21 juin à 15 h 33 min, 13,5 jours plus tard; cela nous donne le 5 juillet, alors que les Ephémérides nous donnent l'apogée le 4 à 5 h). Conclusion : par rapport à ces calculs, nous avons encore des progrès à faire.

LA FIN DU LIVRE III

Je l'abrège parce qu'elle me paraît, pour nous, moins instructive. Nous disposons de bonnes tables du Soleil ce qui n'était pas le cas pour les premiers lecteurs de Ptolémée. Il détaille donc, sur des exemples, comment calculer la position du Soleil moyen, aussi bien sur le modèle excentrique que sur le modèle épicycle. Il donne alors la table de l'anomalie vraie tout au long de l'année.

Il calcule aussi à quelles époques le mouvement apparent est égal au mouvement moyen. Enfin il calcule la position du Soleil à toute date.

Il termine ce livre III par de longues considérations sur l'inégalité des jours solaires. Pour comparer ces durées, il hésite sur l'origine à choisir pour le jour, le lever à l'horizon ou le passage au méridien. Evidemment c'est celui-ci qu'il faut choisir, même si pour les commodités du calendrier civil on reporte l'origine du jour 12 heures auparavant à Minuit. Ptolémée dégage alors très bien les deux causes de l'inégalité des jours solaires : (1) la variation non uniforme de l'anomalie vraie ; (2) les durées inégales de passage au méridien d'arcs égaux de l'écliptique en raison de l'obliquité de celui-ci sur l'équateur céleste.

Pour parler non comme Ptolémée, mais comme je l'avais appris pour passer le bachot (en 1932 on pouvait être interrogé en cosmographie par l'examinateur de mathématiques) : le mouvement non uniforme du Soleil sur l'écliptique conduit à une première inégalité dite "équation du centre" ; la seconde inégalité résulte de la "réduction à l'équateur" et la somme de ces deux inégalités est appelée, c'est malencontreux mais nous n'y pouvons rien, l'équation du temps.

L'équation du centre a pour conséquence immédiate l'inégalité des saisons. L'équation du temps se manifeste par la variation de l'intervalle de temps qui sépare deux passage consécutifs du Soleil au méridien du même lieu.

Retenons la conclusion de Ptolémée: négliger la correction d'équation du temps pour certains phénomènes des planètes, passe encore mais pour les mouvements de la Lune qui sont si rapides, en tenir compte est indispensable. Il pense à ce qui va suivre, les livres IV et V sur la Lune et VI sur les éclipses. Nous les lirons ensemble si cela ne vous lasse pas.

à suivre

K.Mizar

Errata Dans la première partie de cette Lecture de Ptolémée, des lecteurs ont relevé deux erreurs :

- p.22 du CC 51, j'affirme comme Toomer l'a écrit que la traduction française de l'Almageste par N.Halma est introuvable. C'est sans doute vrai aux USA mais en France une réédition photographique serait disponible aux éditions Albert Blanchard, avenue de Médicis, 75005 Paris.

- P.27, à la troisième ligne avant la fin de l'encadré, un signe $\sqrt{\ }$ (racine carrée) a été oublié. Lire $c = r \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}618\ r$