L E C T U R E   D E   P T O L E M E E

"On peut avoir de la vertu sans être instruit mais il est impossible d'arriver à une connaissance et une compréhension théorique sans instruction."

Ptolémée (Livre I, préface)

A la bibliothèque du Laboratoire d'Astronomie d'Orsay, j'ai emprunté un beau livre, l'Almageste de Ptolémée, dans une nouvelle traduction anglaise par G.J.Toomer (694 pages ; éd Springer Verlag 1984). Une lecture passionnante dont je voudrais faire profiter les lecteurs des Cahiers Clairaut car j'imagine que beaucoup d'entre eux n'auront pas le loisir de se plonger dans ce gros volume.

Sans doute aurait-il mieux valu se reporter au texte original tel qu'il fut publié, aux environs de l'an 150, à l'époque du règne de l'empereur Antonin. Mais l'ouvrage était écrit en grec, langue que j'ignore complètement. Une traduction française existe, par N.Halma, dont Toomer, notre traducteur anglais actuel, dit qu'elle est pratiquement indisponible. Et comme cette excellente traduction anglaise, enrichie de nombreuses notes, les Astronomes du Labo ont bien voulu me la confier, je vais essayer de vous en faire apprécier la richesse.

Vous savez déjà que Ptolémée a vécu à Alexandrie de 100 à 175. La dernière observation astronomique utilisée dans son livre date du 2 février 141. Quant au livre lui-même, il portait initialement le titre "Traité mathématique systématique" qu'on condense parfois en "Syntaxe mathématique".C'est un exposé complet d'astronomie qui supplante tous les précédents, y compris ceux de Hipparque qui ne seront dès lors plus copiés, même si les références aux données et aux travaux de Hipparque sont toujours de mise. Quand le mathématicien Pappus écrit à Alexandrie, vers 340, ses "Collections mathématiques", son livre VI est un commentaire du livre de Ptolémée considéré comme l'ouvrage de référence en astronomie qu'il restera pendant plus de mille ans. Sous cet aspect, on peut comparer son influence à celle des Eléments d'Euclide (à ceci près que l'ouvrage de Copernic au XVI ème siècle met pratiquement fin à l'influence du livre de Ptolémée, alors que la publication des géométries non-euclidiennes par Lobatchevsky, Bolyaî et Riemann ne ternit en rien le lustre d'Euclide - c'est toute la différence entre science de la nature et science mathématique).

Aux VIII ème et IX ème siècles, des traductions de la Syntaxe mathématique en syriaque et en arabe commencent à se répandre. Deux de ces traductions, au XII ème siècle, donnent le titre "al-mjsty" qui dérive d'un mot grec signifiant "le plus grand traité" et qui est devenu, dans le latin médiéval, "almagesti", ancêtre du titre devenu aujourd'hui courant Almagest.

Le texte grec fut encore copié sous l'empire byzantin mais sa connaissance en fut perdue en occident. Si bien que la traduction latine du texte arabe par Gérard de Crémone (Tolède, 1175) devint la principale source des commentaires de l'Almageste publiés au Moyen Age.

C'est encore sur cette source que travaillait Georg Purbach (1423-61) à Vienne quand il fut rejoint par Johann Müller (encore appelé Regiomontanus). Les deux savants découvrirent maintes imperfections du texte latin. Après la mort de Purbach, Regiomontanus vint en Italie, y étudia le grec et prit connaissance d'un texte grec de la Syntaxe. Ce qui lui permit en 1463 de publier à Venise l'ouvrage révisé de Purbach "Epitome in Cl.Ptolemaei magnam compositionem".

REGIOMONTANUS (1436-76)
Né à Königsberg, Johann Muller qui s'appelait lui-même Johann de Monteregio, fut finalement connu sous le nom de Regiomontanus. Après sa rencontre avec Purbach à Vienne et ses études de grec en Italie, il reçut mandat du roi de Hongrie de réunir des manuscrits grecs et pour cela il s'établit à Nüremberg où il construisit le premier observatoire européen. Il publia des calendriers, observa une comète (peut-être le passage de 1456 de la comète de Halley) ; il fut appelé en consultation par le pape au sujet de la réforme du calendrier. Au cours d'un de ses séjours à Rome, il fut assassiné mais rien n'indique que ce crime fut lié à ses activités savantes.

Regiomontanus mérite d'être connu, non seulement pour son rôle en astronomie mais aussi pour ses travaux mathématiques en trigonométrie plane et sphérique ainsi qu'en algèbre. Il fut le premier, dans l'Europe de la Renaissance, à commenter Diophante.

La première édition imprimée de l'Almageste reprenait le texte latin de Gérard de Crémone (Venise 1515). Mais le texte grec fut imprimé peu après par Hergravius (Bâle 1538, c'est à dire peu d'années avant la publication de l'ouvrage de Copernic (1543) qui allait, à terme, marquer la fin de l'influence de Ptolémée.

La traduction anglaise de G.J.Toomer part du texte grec établi par Heiberg, à une centaine de petites corrections près que Toomer signale et justifie quand elles se présentent. L'ouvrage présente donc toutes les garanties de rigueur et de précision.

CE QU'EST L'ALMAGESTE ET CE QU'ELLE N'EST PAS

L'Almageste se présente comme une suite de treize "livres" - dont voici les titres - subdivisés en chapitres. :

I. Après un bref aperçu sur l'Univers tel que le voit l'astronome, exposé des connaissances utiles de trigonométrie.
II. Questions d'astronomie sphérique en relation avec lever et coucher du Soleil, durée du jour solaire, etc.
III. Théorie du Soleil.
IV. Théorie de la Lune ; parallaxe du Soleil et de la Lune.
V. Compléments à la théorie de la Lune ; on y trouve aussi la théorie de l'astrolabe.
VI. Les éclipses et retour sur les parallaxes du Soleil et de la Lune.
VII. Les étoiles fixes, hémisphère nord.
VIII. Les étoiles fixes et la Voie Lactée, l'hémisphère sud.
IX. Théorie des planètes.
X. Suite de la théorie des planètes, cas de Vénus et de Mars.
XI. Suite de la théorie des planètes, cas de Jupiter et de Saturne.
XII. Suite de la théorie des planètes, les rétrogradations.
XIII. Suite et fin de la théorie des planètes, les mouvements en latitude céleste.

En résumé, 350 pages sur l'astronomie sphérique et ses applications à l'observation des apparences : 230 pages sur la théorie des planètes qui fait l'originalité de l'ouvrage. Nous ne négligerons pas cependant la première partie qui nous fera comprendre les moyens dont disposait Ptolémée pour construire sa théorie.

CE QUE LE LECTEUR DE L'ALMAGESTE DOIT SAVOIR

Toomer nous donne quelques bons conseils pour tirer le meilleur profit possible de notre lecture de l'Almageste.

Bien comprendre, par exemple son écriture des nombres. Ptolémée utilise un système sexagésimal de numération que les Grecs ont emprunté aux Babyloniens. Ils écrivent, par exemple 6,13;10,0,58 ce qui signifie : $6.60 + 13.1 + 10.60^{-1} + 0.60^{-2} + 58.60^{-3}$

que Toomer convient d'écrire (en condensant la partie entière) : 373;10,0,58

Pour l'écriture des fractions, Ptolémée emploie la méthode égyptienne qui ne connaît que la fraction 2/3 et les inverses d'entiers; ainsi écrit-il 1/2 + 1/4 au lieu de 3/4. (Petit exercice d'arithmétique pour nos élèves, par exemple traduire 57/43 en somme de fractions égyptiennes)

En trigonométrie, Ptolémée nous paraît encore plus maladroit. Il ignore le cosinus et n'utilise pas le sinus mais les cordes. Ses calculs révèlent une excellente connaissance d'Euclide mais entraînent des développements sur lesquels nous ne nous attarderons pas. Il suffit de savoir qu'il utilise un cercle dont le diamètre est divisé en 120 parties égales (toujours la numération sexagésimale).

Pour la chronologie, Ptolémée utilise l'année égyptienne (365 jours répartis en douze mois de 30 jours plus 5 jours épagomènes en fin d'année) et l'ère Nabonassar. Ce denier choix s'explique : les premières observations auxquelles il se réfère datent du temps du roi Nabonassar le 1 du premier mois Thoth de l'an 1 de Nabonassar correspond au 26 février de -746 ou 747 av J-C dans le calendrier julien.

Dans l'indication des dates, Ptolémée cite souvent deux nombres car, dans l'antiquité, le début du jour correspond au lever du Soleil en Egypte ou à son coucher à Babylone : Pour un événement entre lever et coucher du Soleil, les deux dates sont identiques ; pour un événement entre coucher et lever du Soleil, la date n en Egypte est notée n+1 à Babylone. Bien d'autres difficultés résultent du recours par Ptolémée à divers autres calendriers ; Toomer a pris le parti de traduire chaque fois en revenant à la date correspondante dans le calendrier julien, merci à lui.

Le catalogue d'étoiles citées par Ptolémée répartit celles-ci en 48 constellations. Toomer traduit chaque fois les notations de Ptolémée en notations traditionnelles, affectant sa traduction d'un astérisque dans les cas où un doute peut subsister sur l'identification proposée. Pour chaque étoile, Ptolémée donne sa localisation dans la constellation, son éclat, sa couleur, sa longitude, sa latitude, sa magnitude (échelle des grandeurs de 1 à 6 selon Hipparque). Notation : par exemple XXXIX,2 pour la deuxième étoile de la 39 ème constellation, ici Procyon dans Canis Minor.

LES PREMIERS LIVRES

Entrons enfin dans le texte de Ptolémée lui-même. Sachant que nous parcourerons plus vite les premiers livres car nous avons hâte d'arriver à la théorie des planètes. Mais ces préliminaires auront tout de même l'avantage de nous familiariser avec sa façon de penser.

LIVRE I. Les deux premiers chapitres servent de préface, les intentions de l'Auteur, et de commentaire du plan. Chap.3 :"Que le ciel se déplace comme une sphère". Autrement dit, le mouvement diurne donne l'idée d'une sphère céleste qui tourne sur elle-même.

Chap.4 : "Que la Terre est sensiblement sphérique". Ce n'est pas une nouveauté, les Pythagoriciens l'ont affirmé et justfié plus d'un demi millénaire auparavant. Il suffit, dit Ptolémée, de constater que les moments d'apparition du Soleil et de la Lune changent si on va vers l'Est ou vers l'Ouest, que les étoiles visibles au Sud changent si on se déplace vers le Nord ou vers le Sud ; la forme cylindrique est donc exclue pour la Terre. Les Pythagoriciens faisaient intervenir des raisons mystiques (la perfection de la forme sphérique), Ptolémée s'en tient à des raisons fondées sur l'observation.

Chap.5 : "Que la Terre est au milieu des cieux". Car si ce n'était pas le cas, si elle était hors de l'axe du monde, il faudrait pourtant qu'elle soit équidistante des deux pôles, et si elle était sur l'axe il faudrait qu'elle se soit déplacée vers l'un des pôles ou vers l'autre. Autrement dit des arguments purement géométriques ; avec cette remarque qu'on parle des deux pôleset que le pôle austral n'est pas visible d'Egypte. Cependant, l'argumentation se développe en parlant pour la première fois de la "sphaera recta", la sphère céleste locale pour un observateur situé sur l'équateur terrestre (tous les parallèles d'égale déclinaison sont alors "recta", perpendiculaires au plan horizontal).

Chap. 6 : "Que la Terre a la dimension d'un point par rapport à la sphère céleste". Tout se passe comme si les constellations sont placées sur un sphère céleste aussi grande que l'on veut.

Chap. 7 : " Que la Terre ne peut avoir aucun mouvement qui la déplacerait d'où elle est." Ce qui résulte logiquement du chap 5, la Terre est au centre du monde.

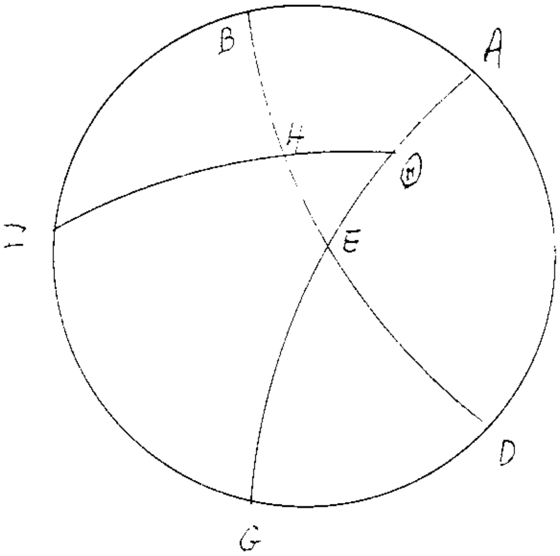
Chap. 8 : "Qu'il y a deux mouvements différents dans le ciel", 1°) le mouvement d'ensemble du ciel étoilé d'Est en Ouest, d'où la définition des pôles et de l'équateur célestes ; 2°) le mouvement dans l'autre sens, et autour d'un autre axe, du Soleil, de la Lune et des cinq planètes, d'où la définition du grand cercle de l'écliptique.

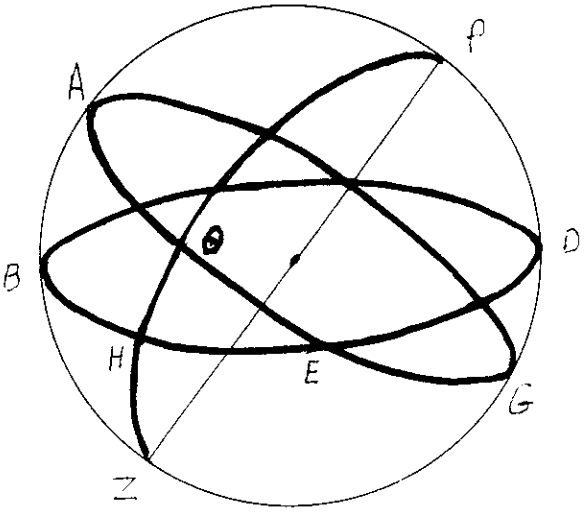
Chap. 9 à 16 : calculs de cordes, autrement dit calculs trigonométriques dont vous seriez vite lassés ; je renvoie à un encadré, pour les curieux, un exemple de ces calculs.

<u>LIVRE II</u>. Il traite de problèmes d'astronomie sphérique pour les régions habitées ; Ptolémée entend par là un quart de l'hémisphère Nord puisque l'ombre méridienne du Gnomon à l'équinoxe est toujours dirigée vers le Nord et que les écarts en longitude des heures d'éclipse de Lune diffèrent toujours de moins de douze heures.

Ces problèmes de <u>sphaera obliqua</u> (sphère céleste locale pour un observateur non situé sur l'équateur terrestre) sont du genre suivant: "la durée du jour le plus long étant donnée, comment trouver l'arc de l'horizon compris entre lever et culmination du Soleil."

Sur la figure de gauche, nous reproduisons celle qu'a dessinée Ptolémée ; à droite la traduction que que nous en donnons en reprenant les mêmes lettres (en y ajoutant le pôle boréal P) et en utilisant une perspective axonométrique approximative qui nous est plus familière.





ABZGD est le méridien du lieu, BHED la moitié Est de l'horizon (B le Sud, D le Nord), Z est le pôle céleste austral, ZHΘ le cercle horaire du Soleil lors de son lever le jour du solstice d'hiver (après avoir annoncé "jour le plus long", Ptolémée trouve plus commode de dessiner la figure pour le jour le plus court). Il fait le calcul pour Rhodes. La donnée est l'arc EΘ = 1h 15 mn ou 18°45' donc ΘA - 3 h 45 mn ou 71°15' qui correspond à la demi durée du jours le plus court. Ptolémée en déduit par des calculs de cordes qu'il est le seul à apprécier l'arc HB cherché peu différent de 60°.

Pb.2 : les données étant les mêmes, comment trouver la hauteur du pôle et vice versa. Autrement dit, connaissant l'arc ΘA calculer l'arc DP ou connaissant la latitude géographique du lieu, trouver la durée du jour le plus court.

Pb.3 : comment calculer pour chaque région quand et combien de fois le Soleil atteint le zénith. Ptolémée vit en Egypte et connait donc des régions intéressées par le phénomène.

Pb.4 : déduire des données précédentes les rapports de du gnomon à son ombre pour les équinoxes et les solstices. Ne disposant pas d'un formalisme de calcul suffisant, Ptolémée expose les données de la sphaera obliqua parallèle par parallèle. Il obtient ainsi des tables des levers et des couchers des constellations zodiacales pour différentes régions, équateur, Basse Egypte, Rhodes, Angleterre méridionale. Il calcule ensuite l'angle entre horizon et écliptique.

Déterminer pour chaque ville sa latitude et sa longitude est en dehors du sujet de l'Almageste, Ptolémée renvoie le lecteur à sa Géographie. Pour la mesure des longitudes, il proposait a priori de les compter vers l'Est ou vers l'Ouest à partir du méridien d'Alexandrie mais finalement il préféra choisir comme méridien origine celui des Iles Fortunées, à l'extrême Ouest du monde alors connu de sorte que toutes les longitudes étaient orientales.

°°°

J'arrête ici la première partie de ce feuilleton ptoléméen. Le bilan est maigre, mais c'était sans doute inévitable tant la pensée de l'auteur est éloignée des préoccupations astronomiques actuelles. Cependant même si nous sommes impatients d'en arriver aux planètes, je crois que nous aurons intérêt à lire attentivement le chapitre 3 sur le Soleil. Dans un prochain numéro des Cahiers ; pour l'instant, payons nous le luxe d'un calcul de cordes à la manière de Ptolémée.

(à suivre) K.Mizar

LA TRIGONOMETRIE DE PTOLEMEE Voici comment calcule le côté c du décagone régulier convexe qui sera pour lui la corde de l'arc de 36°. Il considère la figure suivante (à gauche) : un demi cercle de diamètre AG égal à 120 parts, de centre D ; E est le milieu de DG, Z sur DA tel que EZ = EB. Il démontre que ZD est le côté c du décagone régulier convexe et BZ le côté c' du pentagone régulier convexe :

d'après Euclide, $GZ.ZD - ED^2 = EZ^2$

comme $EZ = EB$ et $EB^2 = ED^2 + DB^2$ il en résulte
$GZ.ZD - ED^2 = ED^2 + DB^2$, $GZ.ZD = DB^2$ ou $GZ.ZD = DG^2$

qui exprime que GZ a été partagé en moyenne et extrême raison. Or Ptolémée sait son Euclide sur le bout des doigts, il sait donc que si le décagone et le pentagone réguliers convexes sont inscrits dans le même cercle, leurs côtés sontles parties d'un même segment partagé en moyenne et extrême raison. Donc c = DZ.

Pour le côté c' du pentagone, Ptolémée s'appuie sur la relation $c'^2 - DA^2 = c^2$ donc $c' = BZ$;

Avec AG = 120, DE = 30, $EB^2 = 3600 + 900 = 4500$

EZ 67;4,55 et par soustraction DZ = c = 37;4,55 et BZ = c' 70;32,3