Le moment cinétique à travers l'Univers

Sans prétendre que notre Univers tourne bien rond, force est de constater que partout, des objets les plus proches aux plus lointains, des plus modestes aux plus gigantesques, on observe une grande valse effrénée : mouvements de rotation propre des planètes, des étoiles, des galaxies, mouvements de révolution de ces mêmes planètes, des étoiles doubles...

Tous ces mouvements sont gérés en première et bonne approximation par les lois de la mécanique newtonienne à laquelle nous nous limiterons dans ce modeste article. Plus précisément, nous nous proposons de montrer sur des exemples très divers qu'un bilan de moment cinétique fournit un cadre explicatif à la fois large et élémentaire.

I. Le moment cinétique

a) MOMENT CINETIQUE ORBITAL (ou de révolution).

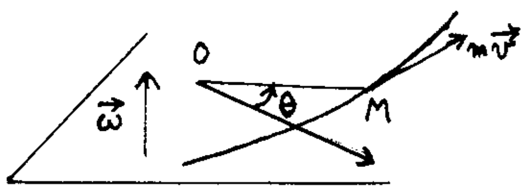
Considérons d'abord le cas simple d'un point matériel de masse m orbitant sur un cercle de rayon R et de centre O. Le moment cinétique, noté $\vec{\sigma}_0$, en O attaché à ce mouvement est :

$$\vec{\sigma}_0 = m\,R^2\,\vec{\omega}$$

(fig.1)

où $\vec{\omega}$ est le vecteur vitesse angulaire du mouvement. $\vec{\sigma}_0$ est le moment en O de la quantité de mouvement $m\,\vec{v}$ du point matériel.

Plus généralement, pour une trajectoire plane non circulaire (fig2)



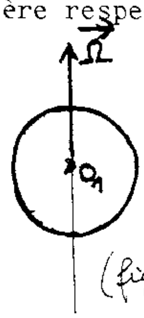
$$\vec{\sigma}_0 = m\,r^2\,\vec{\omega} \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad r = OM$$

$$\|\vec{\sigma}_0\| = m\,r^2\,|\omega|$$

(fig2)

b) MOMENT CINETIQUE PROPRE.

Limitons-nous au cas simple d'une sphère de centre O_1 , de rayon R et de masse M en mouvement de rotation autour d'un de ses diamètres. A ce mouvement de rotation propre de vecteur rotation $\vec{\Omega}$ correspond un moment cinétique propre en O_1 , que nous noterons $\vec{\Sigma}_{O_1}$. Si la répartition de la masse dans la sphère respecte la symétrie sphérique :

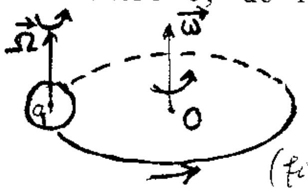


$$\vec{\Sigma}_{O_1} = J\,\vec{\Omega} \qquad \text{avec } J = \alpha\,M\,R^2 \quad (0 < \alpha \leq 1).$$

Pour une sphère homogène $\alpha = 2/5$

(fig 3)

c) <u>CAS GENERAL</u> d'un mouvement de révolution et d'un mouvement de rotation propre associés : le moment cinétique total s'obtient par simple additivité (théorème de König). Ainsi pour un objet sphérique de masse M à répartition sphérique en rotation autour d'un de ses diamètres (vecteur rotation $\vec{\Omega}$) dont le centre O_1 décrit une orbite circulaire de centre O, de rayon r (vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$) :



(fig 4)

moment cinétique total en O = $\vec{\Sigma}_{O_1} + \vec{\sigma}_O$

avec $\vec{\Sigma}_{O_1} = J\,\vec{\Omega}$ et $\vec{\sigma}_O = Mr^2\vec{\omega}$

Si $\vec{\omega} = \vec{\Omega}$, la sphère montre toujours la même face au point O (cas de la Lune dans son mouvement autour de la Terre), le moment cinétique total en O vaut $(J - M\,r^2)\,\vec{\omega}$.

II. Bilans de moment cinétique

La dynamique des mouvements orbitaux et de rotation propre est régie par les variations du moment cinétique. On est ainsi conduit, pour tout système, à effectuer un bilan de moment cinétique. Nous nous plaçons dans un référentiel galiléen ou supposé comme tel.

Le moment cinétique d'un système peut varier :
- du fait d'un transport de matière entre le système et son environnement (fragmentation du système, émission d'un flux de particules,...), la matière ainsi transférée emportant du moment cinétique orbital ou propre ;
- du fait des interactions dont le système est l'objet (forces gravitationnelles, forces électromagnétiques, frottements,...).

Pour un système <u>isolé</u> (absence d'interactions avec l'extérieur) et <u>fermé</u> (absence d'échange de matière avec l'extérieur), le moment cinétique total se conserve :

$$\vec{\Sigma}_{O_1} + \vec{\sigma}_O = \overrightarrow{Cte}$$

de sorte que

$$\Delta\vec{\Sigma}_{O_1} + \Delta\vec{\sigma}_O = \vec{0}$$

toute variation de moment cinétique propre entraîne, dans ces conditions, une variation opposée du moment cinétique orbital (et réciproquement).

Un cas particulier important est la conservation du moment cinétique orbital exprimé par la loi des aires qui se traduit par : $m\,r^2\dfrac{d\theta}{dt} = Cte$

L'aire balayée par unité de temps par le rayon vecteur OM (fig 2), soit $\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$ reste constante. On introduit la <u>constante des aires</u> $C = r^2\dfrac{d\theta}{dt}$

Cette loi est satisfaite pour un point matériel lorsque la ligne d'action de la force $\vec{F}$ à laquelle il est soumis passe constamment par O (force centrale). C'est le cas d'une force gravitationnelle si O est le centre attracteur. Dans le cas du mouvement de révolution des planètes du système solaire, cette loi de conservation se traduit par la seconde loi de Kepler.

III. Inspection du système solaire

a) REPARTITION DU MOMENT CINETIQUE DANS LE SYSTEME SOLAIRE.

Si, en première approximation, on assimile les trajectoires planétaires à des cercles de rayon r, la seconde loi de Kepler s'écrit :

$$r^2\omega = C \qquad (1)$$

la constante des aires C pouvant être considérée avec une excellente approximation comme indépendante de la planète. Le référentiel est celui de Copernic. Par ailleurs, la loi fondamentale de la dynamique conduit à :

$$G\,\frac{M_\odot m_p}{r^2} = m_p\omega^2 r \qquad (2)$$

($M_\odot$ masse du Soleil ; m_p masse de la planète ; G constante gravitationnelle)

Soit :

$$r^3\omega^2 = K \qquad (3) \qquad \text{avec } K = G\,M_\odot$$

forme particulière de la troisième loi de Kepler. On en déduit $C = \sqrt{Kr}$

et

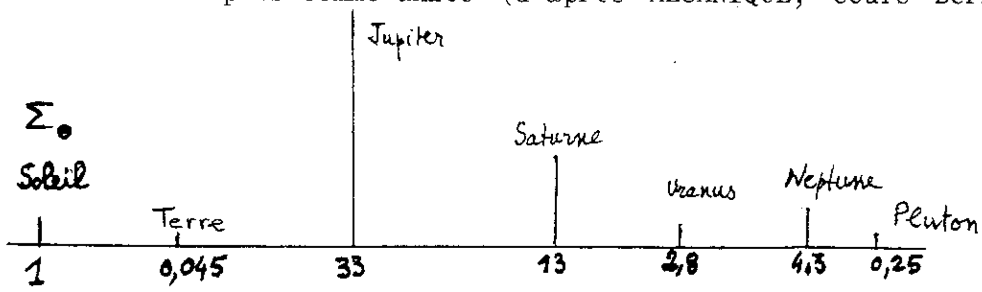
$$\boxed{\sigma_S = m_p\sqrt{Kr}} \qquad (4)$$

où S est le centre du Soleil.

Le moment cinétique orbital des planètes varie donc approximativement comme $m_p\sqrt{r}$. Ce sont donc naturellement les planètes massives et éloignées du Soleil (Jupiter, Saturne) qui sont détentrices de la plus grande part du moment cinétique orbital du système solaire.

Par ailleurs, les moments cinétiques propres des planètes sont négligeables devant leurs moments cinétiques orbitaux.

Le tableau suivant résume la situation, le moment cinétique de rotation propre du Soleil étant pris comme unité (d'après MECANIQUE, cours Berkeley):



Par exemple, pour Jupiter $r_{Ju} = 5,2\ r_T$ et $M_{Ju} = 318\ M_T$; d'après (4) :

$$\sigma_{Ju} = 318\sqrt{5,2}\,\sigma_T = 725\,\sigma_T$$

De même pour Saturne $\sigma_{Sa} = 95\sqrt{9,54}\,\sigma_T \simeq 290\,\sigma_T$

Ainsi le moment cinétique orbital de l'ensemble de ces deux planètes représente plus de mille fois celui de la Terre.

Il faut aussi remarquer que les moments cinétiques du Soleil et des planètes, tant orbitaux que propres, sont tous orientés dans le même sens (il y a exception pour Vénus et Uranus). Une telle situation suggère à l'origine un même mouvement de rotation d'ensemble d'un système initial ayant donné naissance à notre système solaire. Le cas d'Uranus dont l'axe de rotation propre est pratiquement dans le plan de l'orbite est très certainement le résultat d'une rencontre inopinée...

b) ORIGINE DU SYSTEME SOLAIRE

Il s'agit d'une question qui a donné lieu à des débats très controversés. Les diverses théories, dites de type "catastrophique" qui attribuent la formation des planètes par action d'une étoile perturbatrice qui s'approchant suffisamment près du Soleil permet l'éviction par celui-ci de globules planétaires, sont aujourd'hui abandonnées. Outre que les effets de marée à la surface du Soleil disloqueraient les globules ainsi formés, toutes ces théories achoppent sur le fait que le moment cinétique ainsi transféré serait insuffisant. On peut en effet noter que le seul moment cinétique orbital total des planètes Jupiter et Saturne vaut près de 50 fois le moment cinétique propre du Soleil. Pour que l'astre perturbateur ait une action sur le Soleil, il faut supposer que la distance d'approche ne soit pas trop grande. Mais dans ce cas on ne peut espérer disposer d'un transfert suffisant de moment cinétique (le moment cinétique orbital décroissant lorsque la distance décroît).

Considérons le cas de Jupiter. Si l'orbite de cette planète avait été initialement rasante autour du Soleil ($r = R_\odot$), son moment cinétique orbital aurait été (d'après(4)) dans le rapport $\sqrt{R_\odot/r_♃} = 1/33$ avec son moment cinétique orbital actuel. Pour Neptune, le rapport est encore plus sévère, soit 1/80. Multiplier ainsi le moment cinétique par 33, par 80, représente un apport très considérable. A ce propos, l'astronome Russell a fait une remarque simple mais forte, notant qu'on passe de la vitesse circulaire v_c à la vitesse parabolique d'échappement v_p par multiplication par $\sqrt{2}$, $v_p = \sqrt{2}\, v_c$. Ainsi, passant de la vitesse circulaire sur orbite rasante à la vitesse parabolique correspondante ($r = R_\odot$), le moment cinétique orbital est seulement multiplié par $\sqrt{2}$. On est loin du compte ! On ne pourrait comprendre dans ces conditions que des planètes comme Jupiter, Saturne ou Neptune n'aient pas échappé à l'attraction solaire. Même une planète comme Mercure n'aurait pu rester satellisée.

Les théories actuelles admettent l'existence d'une nébuleuse planétaire primitive évolutive. A partir d'un disque de poussières, des agrégats se forment localement agissant comme des centres d'attraction pour la matière environnante. Ainsi seraient nées les planètes. Ce type de modèle s'accorde bien avec l'idée d'une même rotation d'ensemble entraînant les agrégats.

Quant aux rotations propres des planètes, elles auraient pour origine des mouvements tourbillonnaires engendrés localement et de même sens que le mouvement de rotation d'ensemble.

c) LE VENT SOLAIRE.

Il s'agit d'un flux continu de particules constituant un plasma d'électrons et de protons émis par le Soleil. Les trajectoires du vent solaire sont incurvées et spiralent dans le sens de la rotation propre du Soleil, d'une part par l'entraînement initial dû à la rotation propre du Soleil, d'autre part par l'action du champ magnétique interplanétaire créé par le Soleil. La direction de ce champ magnétique est liée au sens de rotation propre du Soleil.

L'émission du vent solaire se traduit par un prélèvement de moment cinétique au détriment du moment cinétique propre du Soleil, d'où un ralentissement de la rotation solaire. Ce moment cinétique se retrouve dans le vent solaire sous forme de moment cinétique orbital du fait de l'incurvation des trajectoires du vent solaire. On montre que le moment cinétique ainsi prélevé vaut, par unité de masse du vent solaire émis :

$$L = \Omega_\odot r_A^2 \quad (5) \qquad \text{(-voir note 1-)}$$

où $\Omega_\odot$ est la vitesse angulaire de rotation propre du Soleil(*) et r_A une distance caractéristique (distance d'Alfvén) qui vaut environ 30 $R_\odot$. Le Soleil éjecte de cette façon par unité de temps une masse $-\frac{dM}{dt} = 10^6 \, T.s^{-1}$.

La perte correspondante de moment cinétique propre du Soleil vaut, par unité de temps :

$$\frac{d\Sigma_\odot}{dt} = L \frac{dM_\odot}{dt} = \Omega_\odot r_A^2 \frac{dM_\odot}{dt}$$

D'autre part :

$$\Sigma_\odot \simeq J_\odot \Omega_\odot \quad \text{avec} \quad J_\odot = \alpha M_\odot R_\odot^2 \quad (\alpha \simeq 1/16)$$

$$\text{soit} \quad \frac{d\Sigma_\odot}{dt} = -\Sigma_\odot \frac{r_A^2}{J_\odot} \left|\frac{dM_\odot}{dt}\right| = -\frac{\Sigma_\odot}{\tau}$$

$$\text{avec} \quad \tau = \frac{J_\odot}{r_A^2 \left|\frac{dM_\odot}{dt}\right|}$$

(*) En fait, le Soleil ne peut être strictement assimilé à une sphère rigide et la rotation est plus rapide à l'équateur qu'aux pôles. La valeur indiquée est une valeur moyenne correspondant à une période de rotation de 27 jours environ.

τ est la constante de temps du phénomène relative à la vitesse de variation de $\Sigma_{\odot}$. Numériquement : $J_{\odot} \simeq 6.10^{46}$ SI , $r_A \simeq 30\ R_{\odot}$ et on trouve τ de l'ordre de quelques milliards d'années, c'est-à-dire du même ordre de grandeur que l'âge actuel du Soleil. Ce calcul évaluatif suppose en particulier que $|dM_{\odot} / dt|$ reste de l'ordre de sa valeur actuelle.

IV. Les effets de marée

On sait que notre satellite, la Lune, présente toujours une même face à notre planète. Autrement dit, la période de révolution de la Lune est égale à sa période de rotation propre. Nous allons montrer en raisonnant sur un modèle simplifié que ce phénomène d'égalisation des périodes est une conséquence de la conservation du moment cinétique suite à un ralentissement du mouvement de rotation propre par les effets de marée dûs au champ gravitationnel terrestre.

Soit un astre sphérique A de masse m, de vecteur rotation propre $\vec{\Omega}$ et dont le centre O_1 décrit une orbite circulaire de rayon r ayant pour centre attracteur O. Le vecteur vitesse angulaire de ce mouvement orbital est $\vec{\omega}$. Initialement $\Omega > \omega$.($\vec{\omega}$ et $\vec{\Omega}$ sont de même direction et de même sens) (fig 4). La conservation du moment cinétique total de A s'écrit

$$J\Omega + m r^2 \omega = C^{te} \qquad (5)$$

L'énergie totale E vaut : $E = \frac{1}{2} J\Omega^2 + \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 - m r^2 \omega^2$

soit $E = \frac{1}{2} J\Omega^2 - \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$

$\frac{1}{2} J\Omega^2$ est l'énergie cinétique de rotation propre de A ;

$\frac{1}{2} m r^2 \omega^2$ est l'énergie cinétique liée au mouvement orbital ;

$-m r^2 \omega^2$ représente l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle de A dans le champ du centre attracteur O : c'est un résultat classique que dans le cas d'un mouvement circulaire, cette énergie potentielle (négative) est égale en valeur absolue au double de l'énergie cinétique orbitale.

En outre, selon (4)

$$\sigma = m r^2 \omega = m\sqrt{Kr} \qquad (K = GM_0)$$

Par suite des effets de marée créés par le champ attracteur la rotation propre de l'astre A se ralentit : Ω décroît. La conservation du moment cinétique total exi ge que la perte de moment cinétique propre ($J\Omega$) qui en résulte soit compensée par une augmentation équivalente du moment cinétique orbital ($mr^2\omega$). Ceci explique d'après (4) que r augmente : la distance OA augmente (extrêmement lentement cependant, de sorte qu'on peut considérer le mouvement orbital comme quasi-circulaire). La relation (3) :

$$r^3 \omega^2 = K \qquad (3)$$

montre alors que ω décroit également. On peut exprimer le moment cinétique total et l'énergie E uniquement enfonction des variables Ω et ω en éliminant r par la relation (3). Un calcul élémentaire (voir note 2) montre que E décroît, ce qui est physiquement obligé, et tend vers un minimum (dE=0) pour $\Omega = \omega$. Dans cet état final du système, la vitesse angulaire de révolution ω est effectivement égale à la vitesse angulaire de rotation propre Ω De, ce fait, l'astre A présente toujours la même face au centre attracteur O. La diminution d'énergie du système est accompagnée d'un transfert de moment cinétique. De tels transferts de moment cinétique liés à des phénomènes dissipatifs (frottements) sont courants dans les systèmes mécaniques usuels.

On peut citer aussi le couple constitué par Pluton et par son satellite Charon. Les trois vecteurs $\vec{\Omega}_1$ (rotation propre de Pluton), $\vec{\Omega}_2$ (rotation propre de Charon) et $\vec{\omega}$ (mouvement orbital) sont égaux, de sorte que Charon montre toujours la même face à Pluton, mais que Pluton montre également une même face à Charon (symétrie non réalisée par le couple Terre-Lune). On peut penser que cet état résulte des effets de marée réciproques des deux astres conduisant à une égalisation des périodes de rotations et de révolution par le biais de la conservation du moment cinétique total (voir note 2).

V. Contraction gravitationnelle

La gravitation, source des forces attractives, tend à faire s'effondrer les astres sur eux-mêmes. A l'opposé, les rotations propres des astres sur eux-mêmes tendent à s'y opposer par effet centrifuge ceci d'autant plus que les vitesses linéaires sont plus grandes. La conservation du moment cinétique a pour conséquence d'augmenter les vitesses linéaires donc les effets centrifuges à mesure que la contraction s'effectue. Cet antagonisme doit conduire à un équilibre ou, si cela est impossible, à une éjection de moment cinétique par émission de matière. En gros, la conservation du moment cinétique impose que : $rv = C$. L'effet centrifuge varie en v^2/r soit C^2/r^3 alors que l'effet gravitationnel ne croît que en k/r^2 , c'est à dire moins vite, quand r diminue. Il existe ainsi une valeur de r telle que les deux effets s'équilibrent.

L'effet centrifuge est d'autre part d'autant plus important que le moment cinétique initial (proportionnel à C) est grand.

Examinons quelques exemples :

a) FORME DE NOTRE GALAXIE

Notre Galaxie a la forme bien connue d'une galette renflée au centre. Imaginons une protogalaxie de forme approximativement sphérique en rotation autour d'un diamètre. La gravitation tend à faire s'effondrer cette matière sur elle-même.

Comme nous venons de le montrer, une contraction radiale perpendiculaire à l'axe de rotation ($rv = C$) est contrariée par les effets centrifuges. Ceci explique le renflement central.

Au contraire, une contraction parallèle à l'axe de rotation n'implique aucune augmentation de vitesse linéaire liée à la conservation du moment cinétique, ce dernier restant nul. Rien en effet ne s'oppose à l'effondrement gravitationnel parallèlement à l'axe, d'où la forme très aplatie de la Galaxie dans le plan équatorial, ceci d'autant plus qu'on s'éloigne du centre (où l'effet radial se fait sentir).

b) FORMATION DES ETOILES

On admet que les étoiles sont issues de protoétoiles dont le rayon est typiquement de l'ordre du parsec. Cette protoétoile possède un moment cinétique propre de rotation important du fait de la grande dimension. Dans ces conditions, le rayon d'équilibre (proportionnel à C^2) se trouve être beaucoup plus grand que les rayons stellaires habituels. Autrement dit, le moment cinétique initial est trop grand pour qu'on puisse aboutir aux rayons stellaires observés.

Il est donc nécessaire que l'étoile élimine du moment cinétique. Cette élimination impose un fractionnement : formation d'une étoile double, d'un système planétaire (voir §IIIa), vent stellaire (§IIIc), anneaux. Le moment cinétique initial se retrouve ainsi en grande partie sous forme de moment cinétique orbital emporté par la matière qui se sépare de l'étoile primitive. C'est probablement l'explication, par exemple, de la grande fréquence des systèmes stellaires doubles dans l'Univers.

c) ETOILES A NEUTRONS

Ce sont des objets stellaires de très petit rayon (quelques kilomètres) dont la période de rotation propre est de l'ordre de la milliseconde. La matière y existe dans un état d'une extrême densité de l'ordre de celle de la matière dans les noyaux atomiques. Partant d'une étoile ordinaire, typiquement comme le Soleil, l'évolution vers une étoile à neutrons est complexe. Il y a, en particulier, émission de matière, et la conservation du moment cinétique entre l'étoile initiale et l'étoile à neutrons n'est qu'une approximation grossière qui conduit toutefois aux bons ordres de grandeur.

Prenons $T_{in} = 25$ j , $R_{in} = 10^6$ km , $R_N = 10$ km

La conservation du moment cinétique propre donne :

$$\frac{R_{in}^2}{T_{in}} = \frac{R_N^2}{T_N} \Rightarrow T_N = T_{in}\left(\frac{R_N}{R_{in}}\right)^2 \simeq T_{in} \times 2.10^{-10}$$

c'est à dire une période de l'ordre de la milliseconde.

Si on compare les énergies cinétiques de rotation initiale et finale :

$$\frac{E_{CN}}{E_{Cin}} = \frac{J_N\,\Omega_N^2}{J_{in}\,\Omega_{in}^2} \simeq \left[\frac{R_N}{R_{in}}\right]^2 \frac{\Omega_N^2}{\Omega_{in}^2} = \left[\frac{R_{in}}{R_N}\right]^2 \simeq 10^{10}$$

On note le gain considérable d'énergie cinétique. Ce gain s'effectue aux dépens d'énergie potentielle via les réactions nucléaires qui conditionnent l'évolution vers l'étoile à neutrons.

VI. Disques d'accrétion

On nomme ainsi un disque gazeux orbitant autour d'un objet massif et très dense (trou noir, étoile à neutrons, naine blanche, ...). Par un mécanisme que nous allons décrire, la matière du disque chute sur l'objet central (accrétion). Les vitesses de chute atteintes sont considérables (de l'ordre de c pour un trou noir, de c/3 pour une étoile à neutrons) et l'énergie libérée par la chute est de l'ordre de grandeur de l'énergie de masse de la matière accrétée. Cette énergie, qui peut atteindre jusqu'à environ 40% de l'énergie de masse, se retrouve sous forme de rayonnement. On pense ainsi que l'énergie rayonnée par les objets les plus lumineux de l'Univers (quasars, noyaux galactiques, étoiles X) proviendrait d'un tel mécanisme d'accrétion.

Expliquons ce phénomène d'accrétion. Le gaz le plus proche de l'objet central possède une vitesse plus grande que le gaz plus externe ($r^3\omega^2$ = Cte (3)). La friction entre les parties internes et les parties externes du disque provoquent l'entraînement du gaz le plus externe qui tend ainsi à accélérer sa rotation au détriment du gaz interne qui décélère la sienne, ceci conformément à la conservation du moment cinétique (si $r^2\omega$ = Cte, $r^2\omega^2$ décroit lorsque r croît). Cette perte d'énergie cinétique correspond à la chaleur produite par friction, chaleur qui est évacuée finalement sous forme de rayonnement. En définitive, le système rayonne, mais au détriment de quelle énergie ?

Le ralentissement du gaz interne du disque a pour effet de diminuer l'effet centrifuge qui équilibrait l'attraction gravitationnelle de l'objet central. Cette baisse de l'effet centrifuge due à la perte de moment cinétique, provoque ainsi l'accrétion du disque sur l'objet central. Cette chute correspond à une diminution de l'énergie potentielle gravitationnelle qui, finalement, est la dispensatrice de l'énergie.

CONCLUSION

Ce parcours rapide et quelque peu cavalier à travers l'Univers dans sa diversité a pu montrer sur le cas particulier du moment cinétique l'extrême généralité des lois physiques. Ainsi la conservation du moment cinétique, établie à partir d'expériences terrestres usuelles, fournit un cadre explicatif du comportement d'objets les plus divers de notre Univers. Certes, une loi de conservation ne peut se substituer à un modèle dynamique précis, mais elle permet de cerner l'essentiel.

Finalement, le moment cinétique apparaît comme un moyen inventé par l'Univers pour éviter l'effondrement gravitationnel.

Hubert Gié

NOTE 1

La perte de moment cinétique propre du Soleil du fait du vent solaire est dûe à une double cause :
- d'une part la matière émise emporte du moment cinétique (perte convective);
- d'autre part le vent solaire interagit avec le Soleil par le biais du champ magnétique interplanétaire ; cette interaction contribue aussi à diminuer le moment cinétique propre du Soleil.

Les deux effets font intervenir la vitesse angulaire $\Omega_\odot$ de rotation propre du Soleil. La matière émise subit un effet d'entraînement lié à la rotation solaire donc à $\Omega_\odot$ ce qui lui communique du moment cinétique. En outre, le champ magnétique solaire, créé probablement par effet dynamo, dépend aussi de $\Omega_\odot$. Une théorie simplifiée conduit à l'expression (5).

NOTE 2

Compte tenu de $r = K^{1/3}\,\omega^{-2/3}$, les équations (5) et (6) s'écrivent :

$$\begin{cases} J\,\Omega + mK^{2/3}\,\omega^{-1/3} = \text{Cte} & (5) \\ 1/2\,J\,\Omega^2 - 1/2\,m\,K^{2/3}\,\omega^{2/3} = E & (6) \end{cases}$$

et en différentiant :

$$\begin{cases} J\,d\Omega - 1/3\,m\,K^{2/3}\,\omega^{-4/3}\,d\omega = 0 \\ J\Omega\,d\Omega - 1/3\,m\,K^{2/3}\,\omega^{-1/3}\,d\omega = dE = 0 \text{ (minimum de E)} \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que $\omega = \Omega$

Dans le cas de deux rotations propres d'axes parallèles et perpendiculaires au plan orbital :

$$J_1\,d\Omega_1 + J_2\,d\Omega_2 - 1/3\,\mu\,K^{2/3}\,\omega^{-4/3}\,d\omega = 0 \text{ (conservation du moment cinétique)}$$

$$J_1\Omega_1\,d\Omega_1 + J_2\Omega_2\,d\Omega_2 - 1/3\,\mu\,K^{2/3}\,\omega^{-1/3}\,d\omega = dE = 0$$

où $\mu = M_1M_2/(M_1+M_2)$ est la masse réduite du système. On en déduit :

$$J_1\,(\Omega_1 - \omega)\,d\Omega_1 + J_2\,(\Omega_2 - \omega)\,d\Omega_2 = 0$$

conduisant à

$$\omega = \Omega_1 = \Omega_2 .$$