Concours général de sciences physiques - 1987

(Classes terminales C, D et E) - Durée : 5 heures

LA MESURE DU TEMPS

(Les différentes parties sont indépendantes entre elles)

I. PROBLEMES DE CALENDRIER

1° L'année ordinaire, appelée tropique, est la durée entre deux équinoxes de printemps successifs. Elle dure "environ" un temps T_c égal à $T_c = 3{,}15569259747.10^7$ secondes.

Un jour dure actuellement un temps $T_1 = 86\,400$ secondes.
Combien y a-t-il de jours dans une année, soit N_1 ?

2° Ce nombre N_1 n'est pas un entier. On est donc conduit à introduire la notion d'année bissextile de 366 jours. D'autre part, les années séculaires ne sont pas bissextiles sauf les années 1600, 2000, 2400,etc. Combien y a-t-il de jours en moyenne dans une année de ce type de calendrier (appelé grégorien), soit N_2 ?

3° Bien sûr, N_2 n'est pas rigoureusement égal à N_1. L'ajustement n'étant pas parfait, de combien de jours se sera décalé le calendrier au bout de 10 000 ans ? Et, réciproquement, à quelle époque ce décalage sera-t-il de 1 mois ?

4° Indépendamment de cette erreur systématique d'arrondi, il y a une autre cause de dérive: l'année tropique diminue de 5,1 millisecondes chaque année. Au bout de 10 000 ans, quel serait le décalage ?

5° D'autre part, la rotation de la Terre sur elle-même se ralentit. L'allongement du jour qui en résulte est de $4{,}5.10^{-8}$ seconde chaque jour. Quelle en est la cause probable ? En 10000 ans, quel serait le décalage ?

6° Ces trois décalages se compensent-ils ? Discuter brièvement la "durée de validité" du calendrier grégorien.

7° Compte tenu de la donnée de la question I4°, justifier le nombre de chiffres significatifs donné à la première question. Par contre, de combien de chiffres avait-on besoin pour résoudre les questions précédentes ?

II. IRREGULARITES DU JOUR SOLAIRE VRAI

En fait, la durée $T_1 = 86\,400$ secondes correspond à un jour solaire moyen. Le jour solaire vrai est la durée entre deux passages consécutifs du Soleil au méridien du lieu ; il n'est pas constant. En effet, sur la sphère céleste ayant pour centre la Terre, le Soleil décrit un grand cercle appelé écliptique qui fait l'angle α avec le cercle équatorial. L'intersection des deux cercles se fait selon la ligne des noeuds $\gamma'\gamma$ (Cf fig 1). On donne $\alpha = 23°27'$.

1° En supposant que le Soleil décrive régulièrement l'écliptique, on aurait :

$$\varphi = \widehat{\gamma TS} = \omega_c(t - t_o) \qquad \text{avec } 2\pi/\omega_c = T_c = 1 \text{ an.}$$

On appelle θ l'ascension droite du Soleil, angle dièdre du plan méridien passant par le Soleil et du plan méridien de référence contenant la ligne des noeuds. Montrer que

$$\operatorname{tg}\theta = \cos\alpha . \operatorname{tg}\varphi$$

On rappelle la formule d'approximation : $f(x+h) \approx f(x) + h.f'(x)$. Comme $\sin^2\alpha/2$ est petit, montrer que la quantité $h_1(N) = (\theta - \varphi)/\omega_1$ vaut sensiblement $- 570 \sin 4\pi(N-82)/365$ secondes, N étant le quantième du jour de l'année et $\omega_1 = 2\pi/T_1$. On rappelle que l'équinoxe de printemps a lieu le 82 ème jour de l'année.

2° En réalité à cause de l'excentricité e de la trajectoire elliptique de la Terre et de la loi des aires de Kepler, l'angle $\varphi = \widehat{\gamma TS}$ suit la variation temporelle suivante :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega_c[1 + e\cos(\varphi - \varphi_o)]^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La dérivée $d\varphi/dt$ est maximum quand la Terre est à son périhélie, atteint le 3 janvier. La valeur de $e = 0,0167$ est petite. Montrer dans ces conditions que la quantité $h_2(N) = \frac{(\varphi - \omega_0 t)}{\omega_1}$ vaut sensiblement $450 \sin 2\pi(N-3)/365$ secondes à une constante additive près.

3° Au total, l'heure $H(N)$ à laquelle le Soleil passe au méridien, au jour N, s'exprime aisément à l'aide de $h_1(N)$ et de $h_2(N)$.
Quelle est la durée du jour solaire vrai en fonction du quantième N ? Tracer la courbe correspondante. A quelles dates je jour solaire vrai est-il égal à 24 heures ? A quelles dates est-il le plus court ? le plus long ? Est-ce mesurable par une bonne montre ?

III. STABILITE D'UNE HORLOGE ASTRONOMIQUE

Un des problèmes essentiels de la mesure du temps est celui de réaliser des diviseurs et des multiples de l'étalon réguliers et bien stables. L'horloge astronomique sert encore beaucoup.

1° Essentiellement il s'agit d'un pendule composé, de masse m, oscillant dans le champ de pesanteur local g. Soit J le moment d'inertie par rapport à l'axe horizontal et $OG = a$ la distance du centre de gravité G à l'axe. Etablir la formule donnant la période T_o des petites oscillations en écrivant la loi de conservation de l'énergie.

2° La tige du pendule est supposée de masse négligeable. La masse pendulaire est une boule de rayon $R = 5$ cm, de masse $m = 5$ kg, fixée en son centre à la tige. Que vaut OG pour que le pendule batte la seconde (c'est à dire $T_o = 2s$)? On rappelle : $J = ma^2 + 2/5\ mR^2$ .On donne $g = 9,81\ m.s^{-2}$

3° Le coefficient de dilatation linéaire de la boule est $\alpha = \Delta R/R\Delta\theta = 2.10^{-5}\ .K^{-1}$. Calculer le retard par jour pour une augmentation de température $\Delta\theta = 1K$. La tige étant en invar, a ne change pas.

4° Quelle variation de g provoquerait une variation de marche par jour égale à 0,01s ? Le passage de la Lune est-il détectable ? On rappelle que la Lune, 81 fois moins massive que la Terre, gravite à environ 60 rayons terrestres. Attention, le phénomène est "différentiel".

5° En fait, le mouvement exige pour son entretien une amplitude θ_o non négligeable. La période devient $T = T_o\ (1 + \theta_o^2/16)$. Quelle doit être la nouvelle valeur de $OG = a$ pour que le pendule batte toujours la seconde, avec $\theta_o = 0,05$ rd ? On voudrait que le retard par jour ne dépasse pas 0,01 s. Montrer que la variation d'amplitude $\Delta\theta_o$ doit rester inférieure à $\Delta\theta_{max}$ que l'on déterminera. Quelle est la différence d'énergie ΔE du pendule entre la situation d'amplitude θ_o et celle d'amplitude $(\theta_o + \Delta\theta_{max})$? Cette différence est-elle grande par rapport à l'énergie $\Delta E'$ fournie au pendule par période pour entretenir son mouvement ? L'énergie est fournie au pendule par un "poids" d'environ 5 kg tombant d'nviron 2 m en 10 jours, d'où l'expression "remonter" la pendule.

6° Conclure : quelle stabilité attend-on d'une bonne horloge astronomique ? Quelle précision escompter ?
Peut-on détecter les irrégularités du jour solaire vrai (durée entre deux passages consécutifs du Soleil au méridien du lieu)?
Peut-on détecter les irrégularités du jour sidéral (durée entre deux passages consécutifs d'une étoile au méridien du lieu) ?

IV. STABILITE D'UNE HORLOGE A QUARTZ

1° Un quartz piézo-électrique peut être décrit comme un dipôle R, L, C série, shunté par une capacité C_1 (Cf fig 2). On donne $C = 10^{-2}$ pF; $C_1 = 10$ pF; $L = 147,5$ H (c'est à dire une inductance apparente élevée), R est provisoirement négligée.

Si la tension aux bornes du quartz est $u(t) = U \cos\omega t$, le courant est $i(t) = \ \cos(\omega t + \varphi)$.
Montrer que Z peut s'écrire :

$$Z = \frac{1}{C_1\omega} \left| \frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega^2 - \omega_p^2} \right|$$

Indiquer les valeurs de ω_s^2 et ω_p^2 . Montrer que ω_p s'interprète aisément comme la pulsation "bouchon" du dipôle, c'est à dire sa pulsation propre, les bornes n'étant pas reliées. Tracer $Z(\omega)$ et $\varphi(\omega)$.

2° Dans le montage de Pierce, on fait émettre l'oscillateur sur la fréquence bouchon du circuit représenté figure 3. En déduire la formulede Pierce donnant la pulsation d'émission ω en fonction de ω_s , ω_p , C_1 et C_2 puis en fonction de ω_s, C, C_1 et C_2 .
Calculer C_2 pour que $\omega = 8,23550.10^5$ rd.s^{-1}.

3° Généralement C et L sont bien stables. Mais C_1 et C_2 sont parasitées souvent par une capacité parallèle ΔC. Expliquer pourquoi on fabrique un quartz de manière que ω_s soit aussi proche que possible de la pulsation ω à réaliser. Dans le cas présent, calculer $\Delta\omega/\omega$ avec ΔC =1pF puis 10^{-2} pF.

4° Via un comparateur, l'oscillateur fournit des impulsions positives de voltage à la fréquence $f = \omega/2\pi$. Ces impulsions sont appliquées à l'entrée d'une bascule B_o dont le signal de sortie s_o passe instantanément de 0 (état 0) à 5 volts (état 1), puis de 5 volts à 0, etc, cela chaque fois qu'une impulsion est appliquée à l'entrée (Sf fig 4).
On ne garde que la partie positive de ds_o/dt. Montrer qu'on obtient à nouveau une suite d'impulsions positives. Quelle en est la fréquence ?
On effectue 17 fois l'opération précédente. Quelle est la fréquence de sortie ? Application numérique.

5° Que représente le nombre binaire donné par la suite des états des 17 bascules ? Quel énorme avantage représente une horloge à quartz sur une horloge à pendule de ce point de vue ?

6° L'incertitude sur la mesure d'un temps égal à N périodes T est $\Delta t = \Delta T \sqrt{N}$. Quelle est la précision sur 1 seconde du quartz précédent ?
Si N devient très grand, quelle cause vient limiter la précision ? Comparer justesse, fidélité et précision d'une horloge astronomique et d'une horloge à quartz.

V. STABILITE D'UNE HORLOGE ATOMIQUE

A l'heure actuelle, le temps est défini à partir de la fréquence d'oscillation d'un maser à césium, posée par définition égale à ν_a = 9 192 631 777 Hz.

1° Un maser est essentiellement une cavité électromagnétique de longueur L, qui, vide, produirait une onde stationnaire de pulsation $\omega_c = \pi c/L$, où c est la célérité de la lumière dans le vide. Expliquer cette relation. Calculer l'ordre de grandeur de L pour un maser à césium.

2° On envoie dans cette cavité des atomes de césium excités, et par interaction entre les atomes et la cavité, une onde de pulsation ω est extraite de la cavité :

$$\omega = \frac{(\omega_a Q_a + \omega_c Q_c)}{(Q_a + Q_c)}$$

Dans cette formule $\omega_a = 2\pi\nu_a$, Q_a est le "facteur de qualité" de la raie de résonance atomique, et Q_c est le "facteur de qualité" de la cavité. La pulsation ω_a est très stable, surtout s'il y a peu d'atomes et peu de rayonnement. Théoriquement, la précision ultime pouvant être atteinte est $1/(Q_a\sqrt{N})$ où N est le nombre de périodes que dure une mesure sans dérive. Sur 1 seconde, quelle est la précision avec $Q_a = 10^{10}$?

3° En fait, la pulsation ω_c varie relativement beaucoup. Pour quelles raisons ? En déduire que, pour avoir un instrument fidèle, il ne faut pas avoir Q_c trop élevé, et dans ce contexte, commenter la phrase suivante : rien ne sert d'avoir une mesure précise qui dérive (c'est à dire fausse) ni une mesure juste très imprécise.

4° Un laser est un maser qui opère dans le domaine des ondes visibles. Montrer qu'à facteur de qualité identique, et pour un même temps de mesure, on a intérêt à prendre des lasers plutôt que des masers. Par analogie avec la question IV.5°, montrer que le problème est de compter avec précision le rapport des fréquences laser et maser.
Prévoyez-vous un nouveau changement de l'étalon temps ?

5° Mesurer la vitesse de la lumière, c'était mesurer la fréquence d'une transition d'un atome de krypton par rapport à celle du césium. La précision de définition sur la raie du krypton était 10^{-9}. Expliquer l'abandon de l'étalon krypton pour la définition du mètre en 1983. Quel était alors le nouveau dilemne ? La nouvelle définition du mètre est la suivante : le mètre est la distance parcourue par la lumière dans le vide en un temps égal à 1/299 792 458 seconde.
Prévoyez-vous un nouveau changement de l'étalon longueur ? Ne fera-t-on plus jamais de mesure de vitesse de la lumière ?

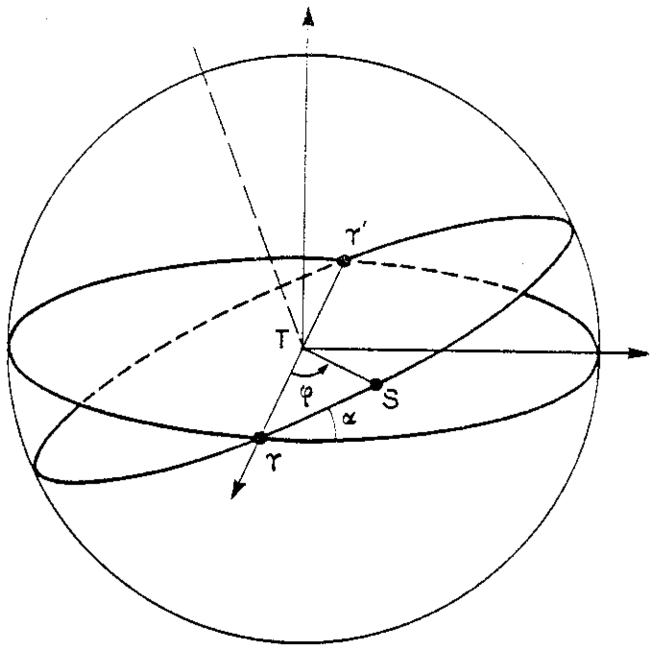

Figure 1

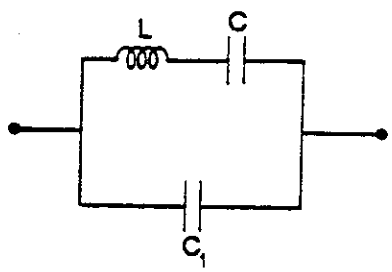

Figure 2

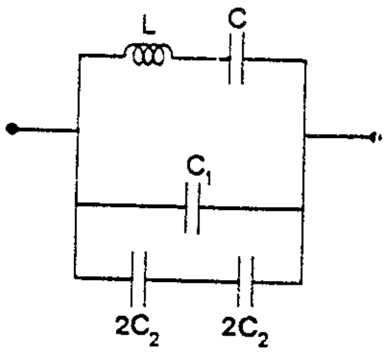

Figure 3

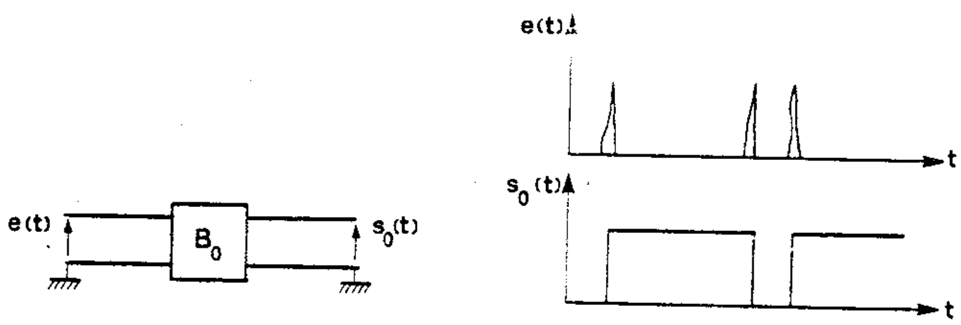

Figure 4

SOLUTION ET CORRECTION DES PARTIES I,II,III

I.1°. Une année comprend $N_1 = T_0/T_1$ jours. $N_1 = 365{,}2422...$ jours.

2°. Une année grégorienne moyenne comprend N_2 jours avec
$N_2 = 365 + 1/4 - 1/100 + 1/400 = 365{,}2425$ jours.

3°. Cette année grégorienne est donc trop longue de 3.10^{-4} jour/an. En 10 000 ans, le décalage sera de 3 jours. En environ 100 000 ans, il sera d'un mois ; on fêterait progressivement Noël aux bourgeons puis aux moisssons.

4°. En 10 000 ans, la dérive sera $5{,}1.10^{-3}(1 + 2 +...+ 10\,000) \simeq 5{,}1.10^{-3}.10^{8}/2 \simeq 2{,}5.10^{5}$ s soit environ 3 jours ; décalage dans le même sens.

5°. La Terre se ralentit à cause du couple retardateur exercé par la Lune et le Soleil sur le bourrelet des marées océaniques et terrestres, la dissipation d'énergie étant due à la viscosité. L'année comprendra de moins en moins de jours. Au total, le décalage sera
$4{,}5.10^{-8}(3{,}65.10^{6})^2/2$ s soit environ 3 jours.

6°.Ces trois décalages jouent dans le même sens, soit environ 10 jours pour 10 000 ans. Les décalages 4 et 5 varient comme $A.t^2$. L'ajustement grégorien est <u>linéaire</u> en t : B.t. On ne peut songer compenser les uns par l'autre que pendant un temps tel que $Bt \simeq At^2$ c'est à dire précisément $t \simeq 10\,000$ ans. Inutile par conséquent de cherche à affiner le calendrier grégorien.

7°. On donnait ΔT_0 à 0,1 ms près soit $\Delta T_0/T_0 \sim 3.10^{-11}$; ce qui justifiait la précision donnée au 1°. Le mot "environ" est là pour signifier que T_0 évolue constamment : donc il faut choisir une année particulière pour donner T_0 .

<u>CORRECTION</u>

Beaucoup d'erreurs dans 2° où certains ont trouvé 365,00 365,25 ou 365,2475
Beaucoup énormément d'erreurs dans 4° et 5° pour trouver la loi en At^2 Certains ont bien raisonné ainsi : au bout de 10 000 ans, l'année aura 51 s de moins ; en moyenne l'année aura eu 51/2 secondes de moins ; décalage total 25.10^4 s ; ce qui était un bon raisonnement.
Quelques candidats seulement citent la marée comme cause mais aucun ne sait le justifier autrement qu'empiriquement ("on sait que la Lune s'est arrêtée déjà, la Terre fera de même").
Personne n'a trouvé la durée de vie comme $t \sim B/A$. De toute façon, même cette manière de voir est relative au <u>choix</u> de B donc n'est pas intrinsèque.
La variation de l'année tropique n'a rien à voir avec la variation de l'année sidérale (très stable et égale à environ 365,256 368 mais non mesurable facilement). Cette variation est due à la non linéarité temporelle du terme de précession des équinoxes.

II.1°Projetons le Soleil en σ sur le plan équatorial. θ est l'angle $\widehat{\sigma T \gamma}$. Les coordonnées de $\overrightarrow{T\sigma}$ sont $(\cos\varphi, \sin\varphi\cos\alpha, 0)$ donc $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\varphi\cos\alpha$. Posons alors $\varepsilon = \theta - \varphi$;
$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\varphi+\varepsilon) \simeq \operatorname{tg}\varphi + \frac{\varepsilon}{\cos^2\varphi} \simeq \operatorname{tg}\varphi\cos\alpha$ soit $\varepsilon = -\sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\alpha) = -\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin 2\varphi$
avec $2\varphi = 2.\frac{2\pi}{365}(N-82)$ car $\varphi = 0$ à l'équinoxe de printemps.
$\frac{\theta-\varphi}{\omega_1} = -\frac{T_1}{2\pi}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin 2\varphi = -570\sin 2\varphi$ seconde
2°. Comme e est petit $[1 - 2e\cos(\varphi-\varphi_0)]\dot{\varphi} = \omega_0(1 + e^2\, 3/2)$
soit en intégrant $\varphi - 2e\sin(\varphi-\varphi_0) = \omega_0 t$ + cste. Soit $\frac{\varphi-\omega_0 t}{\omega_1} = \frac{2e}{\omega_1}\sin\frac{2\pi}{365}(N-3) + \text{cste}$

avec $2e/\omega_1 = T_1\, e/\pi = 460$ secondes.
(attention : erreur dans l'énoncé qui donnait e = 0,0318 au lieu de e = 0,0167)

3°. $H(N) = h_1(N) + h_2(N)$. La durée du jour est donc $T_1 + dH/dN = T_1 + z(N)$ avec

$z(N) = -19{,}6\cos 4\pi\frac{N-82}{365} + 7{,}75\cos 2\pi\frac{N-3}{365}$ secondes. Le tracé de la courbe montre que z = 0 pour le 42 ème, le 135 ème, le 208 ème et le 308 ème jour c'est à dire les 11 février, 15 mai, 27 juillet et 4 novembre. Les jours les plus courts sont le 28 mars et le 17 septembre d'environ -20 s (le 87 ème et le 259 ème), les plus longs sont le 20 juin de 12 s et le 23 décembre de 24 s. Bien sûr tout cela est mesurable sur une bonne montre. Evidemment les erreurs cumulées, H(N) sont, elles, gigantesques puisqu'elle atteignent jusqu'à 15 minutes.

<u>CORRECTION</u> : seuls deux candidats se sont attaqués à cette partie, la question 2° n'ayant pas été traitée sans doute à cause de l'erreur d'énoncé sur e qui a intrigué les deux candidats.

III. 1°. $1/2\ J.\dot{\theta}^2 + mga\ (1 - \cos\theta) = cste$; en dérivant $J\ddot{\theta} + mga \sin\theta = 0$ donne pour les petites oscillations $T_o = 2\pi\sqrt{J/mga}$

2°. $J = J_o + ma^2 = 2/5\ mR^2 + ma^2$ Soit l tel que $T_o = 2\pi\sqrt{l/g}$; alors $l = a + 2/5\ R^2/a$; soit deux racines $a_1 \sim 2/5\ R^2/l$ irréalisable et $a_2 \sim l$.
Application numérique : $l = 99{,}396$ cm $a = 99{,}295$ cm $\sim 99{,}3$ cm.

3°. Si R devient $R + \Delta R$, l devient $l + \Delta l$ avec $\Delta l = 4/5\ (R/a)\Delta R$
$\Delta T/T = 1/2\ \Delta l/l = 2/5\ R^2/al$ ($\propto \Delta\theta$)
Application nuénrique : $\Delta T/T = 2.10^{-8}$ soit $\Delta T = 4.10^{-8}$ s. Retard par jour $= 4.10^{-8}\ s \times 43200$
On pouvait aussi faire le calcul à la machine $\dfrac{T_o'^2 - T_o^2}{T_o^2} = \dfrac{J' - J}{J}$

4°. $\Delta T/T = -1/2\ \Delta g/g$ soit $\Delta g = 2{,}3.10^{-6}\ ms^{-2}$. Si on calcule g Lune on trouve
$g_L = g.1/81.1/60 = g.34.10^{-7}$ cela devrait donc être détectable. Mais non, car l'effet est différentiel ; seule se manifeste g effectif = g Lune(M) - g Lune(T) $\simeq$ g Lune $2R/d = g_L.1/30$
il est donc à peine détectable ; plus exactement, rien ne sert de faire une horloge plus précise puisque son mouvement devrait tenir compte de l'influence de la Lune.

5°. Avec $\theta_o = 5.10^{-2}$ rd ($\simeq 3°$), l devient 99,365 cm et $a_2 = 99{,}264$ cm. La variation sur a_2 est don infime de 32 μm, ce qui est difficile à ajouster mais doit être faisable.
Si l'amplitude change $\theta_o \to \theta_o + \Delta\theta_o$, la période change $T \to T + \Delta T$ avec $\Delta T = T\ .\ \theta_o \Delta\theta_o/8$
$\Delta T/T_o < 1{,}2.10^{-7} \Rightarrow \Delta\theta_o < 1{,}9.10^{-5}$ rd $= 6'' = \Delta\theta$ max
$E = E\ cin + E\ pot = mga\ (1 - \cos\theta_o)$
$\Delta E = mga \sin\theta_o \Delta\theta_o \sim mga\ \theta_o \Delta\theta_o = mga\ 8\ \Delta T/T = mga.10^{-6}$ $\Delta E/E \sim \Delta\theta/2\theta_o \sim 2.10^{-4}$
Par période on fournit $\Delta E' = mga\ 2/86400\ .2 = 200\ \mu J$ Ce qui veut dire que l'énergie fournie ne laisse pas θ_o constante, non plus que l'énergie perdue. Certes cela se compense, mais tout espoir de descendre en deçà du 1/1000 de seconde est relativement exclu.

6°. Conclusion : on peut attendre d'une bonne horloge 10^{-2} s par jour voire 1 s par ans. Thermostater l'horloge, assurer un transfert régulier de l'énergie d'entretien de façon que l'horloge batte toujours de la même façon est impératif. Au delà, on voit que de multiples facteurs mal contôlables entrent en jeu : il faudrait voir comment se répercutent sur la marche de l'horloge, la variation de g(t) (due à la Lune et au Soleil, aux vibrations du sol, etc.), la variation de longueur l(t) (usure du couteau, dilatation) et la variation d'amplitude $\theta_o(t)$ (transfert d'energie mal synchronisé) et ceci SIMULTANEMENT. Cela devient inextricable : on préfère s'adresser à un autre système.

Les irrégularités du jour solaire sont aisément détectables (10s/jour). Les irrégularités de la rotation de la Terre de l'ordre de quelques ms sont peu perceptibles.

CORRECTION

Trop nombreux sont les candidats ignorant la démonstration de la formule du pendule composé.

L'usage des calculettes rend plus faciles les calculs des petites variations mais pourquoi ne plus en faire du tout : ces correctifs sont le lot quotidien du physicien. Il faut savoir les effectuer rapidement pour évaluer les erreurs systématiques.

Vous aimeriez discuter du contenu des Cahiers Clairaut ou des activités du CLEA. Excellente idée.

Pour la traduire en actes notez la date

samedi 21 novembre 1987

ASSEMBLEE GENERALE DU CLEA

de 10 heures à 18 heures, des échanges et des conférences dans le climat CLEA.