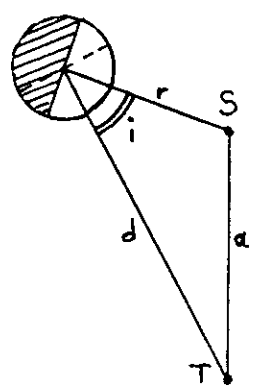
Magnitudes planétaires et moindres carrés

Dans les CC 28 (printemps 85), Jacques DUPRÉ explique très bien comment calculer la magnitude visuelle des planètes à l'aide de la formule de POGSON:



$$m = m_o + 5.\log_{10}(r.d) + a.(\frac{i}{100}) + b.(\frac{i}{100})^2 + c.(\frac{i}{100})^3$$

où r est la distance Soleil-planète, (en UA),
d --- Terre-planète, (en UA),
i: angle de phase de la planète, (en degrés),
m_o : constante de normalisation.

André DANJON donne un tableau des quantités m_o, a, b, c pour les planètes (cf."Astronomie générale"). Ces valeurs sont issues de nombreuses observations, comme on va le voir.

En fait, si on compare les résultats de ce modèle numérique avec les valeurs des magnitudes fournies par les Ephémérides du Bureau des Longitudes (EBL), on trouve des écarts, pouvant parfois atteindre une demi-unité de magnitude (0,5).

J'ai alors repris ces calculs, par une méthode statistique.
Pour cela, et à l'aide d'un ordinateur, j'ai d'abord calculé pour chaque planète l'angle de phase pour une date donnée, ainsi que r et d, et ce sur une période de 13 mois pour avoir une bonne dispersion des valeurs de i.
En mettant en relation cet angle calculé et la magnitude fournie par les EBL (ou mesurée directement), un programme de régression aux 1er, 2è et 3è degrés m'a donné les courbes d'équations

$$m-5.\log(r.d) = f(i) = m_o + a.(\frac{i}{100}) + b.(\frac{i}{100})^2 + c.(\frac{i}{100})^3$$

c'est à dire les coefficients cherchés: m_o, a,b,c.

Le tableau ci-dessous indique les résultats. Les valeurs de A.DANJON servent pour comparaison. Pour Mars, le modèle peut être représenté au 1er ou au 2è degré avec une assez bonne précision, la magnitude n'étant donnée qu'à 0,05 près.

	m_o	a	b	c	
Mercure	-0,21 -0,22	3,80 3,87	-2,73 -2,80	2,00 2,00	← Danjon ← Toulmonde
Vénus	-4,14 -4,05	0,09 -0,48	2,39 3,25	-0,65 -1,0	D T
Mars	-1,36 -1,27 -1,28	1,5 1,4 1,47	0 0 -0,17	0 0 0	D T T
Jupiter	-8,99 -8,96	1,48 0,37	0 0	0 0	D T
Saturne	-8,68 -9,07	1,7 5,63	0 0	0 0	D T
Uranus	-7,04 -6,84	? 0	- 0	- -	D T

Reprenons alors le 2è modèle de A.Danjon pour Mercure et Vénus (orbites circulaires, concentriques, et coplanaires).

Le triangle SMT permet d'écrire:

$$a^2 = d^2 + r^2 - 2rd.\cos i$$

Or $a-d \leqslant d \leqslant a+d$

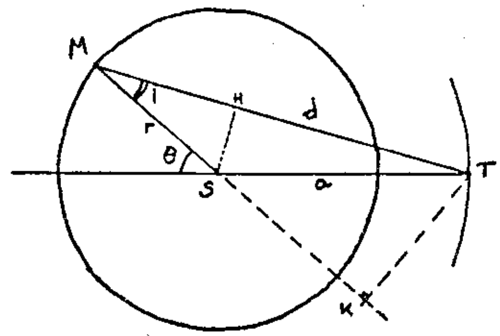
d'où $d = r.\cos i + \sqrt{a^2 - r^2.\sin^2 i}$

$= MH + HT$

De plus, $MK = MS + SK$, soit:

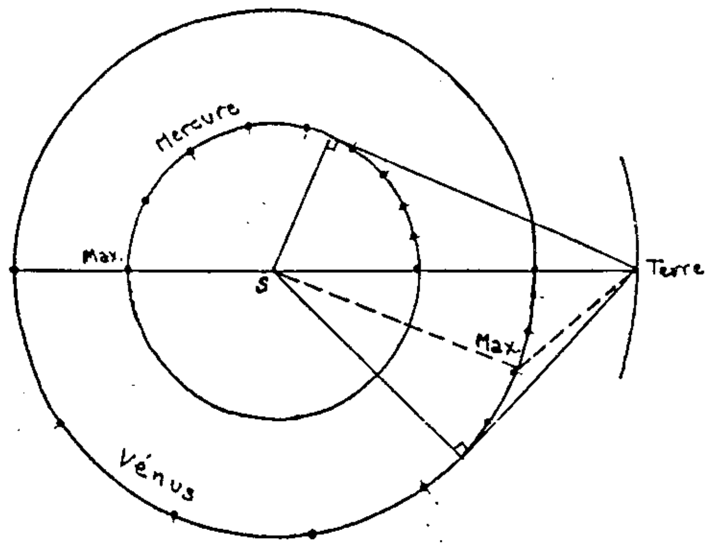
$$d.\cos i = r + a.\cos\theta$$

d'où, si $a = 1_{UA}$, $\theta = \text{Arc}\cos(d\cdot\cos i - r)$.

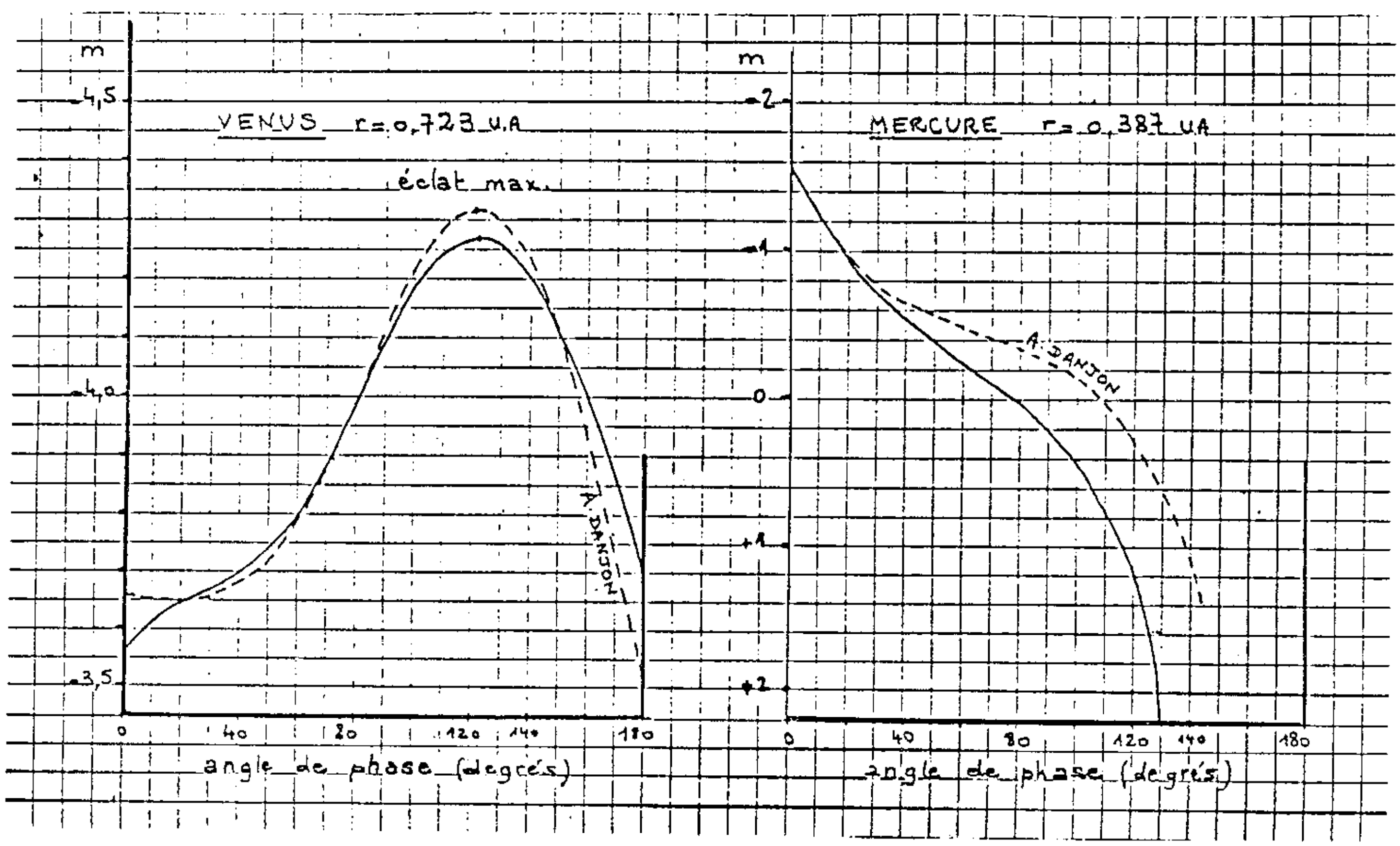


Les nouveaux coefficients donnent alors les résultats suivants, avec r=0,387 UA pour Mercure et r=0,723 UA pour Vénus:

i°	Mercure m	Mercure θ°	Vénus m	Vénus θ°
0	-1,57	0	-3,57	0
20	-0,94	27,6	-3,64	34,3
40	-0,54	54,4	-3,70	67,7
60	-0,26	79,6	-3,80	98,8
80	+0,03	102,4	-3,98	125,4
100	+0,45	122,4	-4,18	145,4
120	+1,16	139,6	-4,27	158,8
140	+2,27	154,4	-4,20	167,7
160	+3,92	167,6	-3,99	174,3
180	+6,21	180	-3,71	180



On traduit graphiquement ces résultats par les courbes m=f(i) pour les deux planètes.



Le maximum d'éclat de Vénus ($m=-4,27$) est atteint pour un angle de phase $i=121°,0$ ($\theta=159°,3$), et non à la position d'élongation maximale, où $i=90°$ et $m=-4,1$.

Pour Mercure, l'éclat est maximal lors de la conjonction supérieure, ce qui hélas la place dans le voisinnage visuel du Soleil...

Le tableau publié par A.Danjon pour Mercure comporte sans doute (?) des erreurs typographiques, car les valeurs de a,b,c qu'il donne ne conduisent pas aux résultats indiqués pour m. Avec r=0,387 UA, il faudrait prendre a=3,82 (3,80), b=-3,32 (-2,73) et c=1,96 (2,00).

Mais mon propos n'est pas de mettre en doute ce remarquable ouvrage qu'est "Astronomie générale", mais seulement de présenter une application de la méthode de traitement statistique de données expérimentales, dite "méthode des moindres carrés".

Cette méthode statistique est très utilisée quand on cherche une relation numérique entre deux grandeurs expérimentales.

On dispose de N mesures, représentées par les couples x_i et y_i ($i=1$ à N). Supposons (par exemple) que y soit lié à x par une relation linéaire: $y=a.x+b$ (x et y sont ici des valeurs théoriques et non des mesures).

L'erreur totale S dans la description des données expérimentales par cette relation est mesurée (par exemple) par

$S = \sum_{i=1}^{N} (y_i - a.x_i - b)^2$ où x_i et y_i sont les mesures réalisées.

On cherche à déterminer les coefficients a et b tels que l'erreur S soit la plus faible possible (on minimise ces carrés).

En résolvant le système de 2 équations à 2 inconnues (a et b): $\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$ on trouve facilement:

$$a = \frac{N.S_{xy} - S_x.S_y}{N.S_{xx} - (S_x)^2} \qquad b = \frac{S_y - a.S_x}{N}$$

$$\text{où} \quad S_x = \sum_1^N x_i \qquad S_y = \sum_1^N y_i \qquad S_{xy} = \sum_1^N x_i.y_i \qquad S_{xx} = \sum_1^N (x_i)^2$$

C'est la régression linéaire. La régression dite logarithmique, ou exponentielle, se traite de la même façon que la régression linéaire grâce à un changement de variables:

$Y=A.X^n$ s'écrit $\text{Log } Y = n.\text{Log } X + \text{Log } A$ soit $y=n.x+A'$

$Y=B.e^{-A/kT}$ ... $\text{Log } Y = -\frac{A}{k}.\frac{1}{T} + \text{Log } B$ soit $y=a.(\frac{1}{T})+b$

Bien sûr, dans ces cas, les valeurs y_i et x_i sont en fait $\text{Log } Y_i$ et $\frac{1}{T_i}$ respectivement, Y_i et T_i étant les valeurs mesurées.

Pour la régression polynomiale (degré 2,3,...), la fonction y(x) devient $y=ax^2+bx+c$ (ou $y=ax^3+bx^2+cx+d$). Le principe de la méthode reste le même:

$S = \sum_{i=1}^{N} (y_i - a.x_i^2 - b.x_i - c)^2$ et $\frac{\partial S}{\partial a}=0$; $\frac{\partial S}{\partial b}=0$; $\frac{\partial S}{\partial c}=0$ d'où a, b, c

mais les calculs deviennent très longs. Il est alors très utile de programmer un ordinateur à cette méthode et de le laisser opérer pour les 10, 20 ou 100 couples de mesures. C'est ce que j'ai fait pour "approximer" la formule de Pogson.

Michel TOULMONDE