

L'EQUATION DE KEPLER (suite et fin)

6- Application: mettre une planète sur orbite.

On a dit, au début de cet article, que l'équation de Kepler (EK) était importante en mécanique céleste. En effet, à présent que l'on peut la résoudre avec la précision voulue, on peut situer, à un instant donné, une planète sur son orbite.

Et (EK) n'est qu'une étape (obligée) dans le calcul.

a). Méthode générale.

Les éléments orbitaux d'une planète sont, pour ce qui nous intéresse:

a : demi-grand axe (en Unités Astronomiques UA)

e : excentricité de l'orbite

T : période de révolution (en jours, ou années)

t_0 : date du passage au périhélie P_0

Les nombres a et e définissent l'ellipse géométriquement. Les valeurs T et t_0 permettent d'introduire le temps qui sera la seule variable ici.

On cherche donc $r(t)$ et $v(t)$ afin de tracer l'orbite en coordonnées polaires (fig.6).

Il suffit d'appliquer les relations suivantes, que l'on a déjà établies:

-1-Calcul de l'anomalie moyenne M

$$M = 2\pi/T \cdot (t - t_0)$$

Si M est en degrés, 2π devient 360. Il faut exprimer $t - t_0$ et T dans la même unité. On devra donc au préalable calculer le nombre de jours écoulés depuis un passage au périhélie. Ce peut ne pas être le dernier: dans ce cas, on prendra M modulo 360°.

On a choisi le périhélie comme point origine car alors : $M(t_0) = 0$. En fait, si on connaît la position de la planète à une date t_1 , cette date peut être prise elle aussi pour origine avec $M(t) = 360/T \cdot (t - t_1) + M(t_1)$. C'est en général de cette façon que l'on calcule les éphémérides, et t_1 est une date de référence pour toutes les planètes: par exemple le 31/12/1899 à 12h TU.

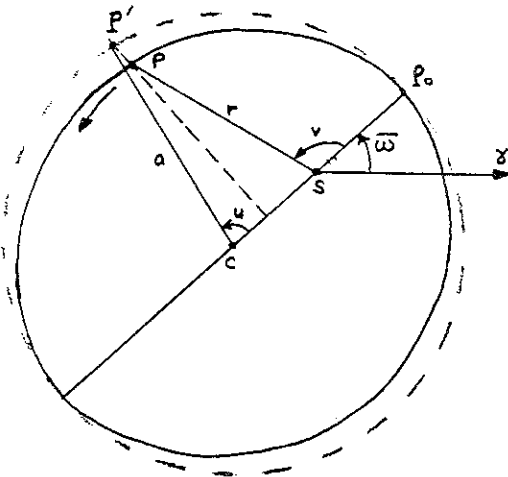


fig.6

Ainsi, $M(t)$ est de la forme: $M(t) = n.t + M_0$ avec n et M_0 caractéristiques d'une planète; dans ce cas, les données t_0 et T sont inutiles.

-2- Calcul de l'anomalie excentrique u

C'est en résolvant (EK) que l'on obtient u : $u = M + e^0 \cdot \sin u$

-3- Calcul de l'anomalie vraie v

On a vu la relation:

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

Si $u=180^\circ$ ou -180° , alors $v=u$

-4- Calcul de la distance au Soleil r

On l'obtient par $r = a.(1-e.\cos u)$ où u est racine de (EK).

Il suffit à présent de reporter la position sur l'orbite.

b). Position de la planète sur la sphère céleste.

Là, le problème devient plus complexe, car il faut situer la planète par rapport à la Terre, et non plus seulement par rapport au Soleil.

Jusqu'à présent, il n'y avait dans notre "espace" que deux corps: le Soleil et la planète. En réalité, la population est plus dense, et l'orbite réellement suivie n'est plus l'orbite "keplerienne" car, toutes les planètes s'attirant mutuellement, le mouvement en est "perturbé".

Le calcul de la position exacte des planètes (et des comètes) fut un des problèmes essentiels de la Mécanique céleste aux XVIII^e et XIX^e siècles. Des astronomes comme Clairaut, Le Verrier, Delaunay, Newcomb, ... ont peu à peu "affiné le modèle": il faut en effet déterminer les termes correctifs à apporter au mouvement keplerien "non perturbé". Delaunay, par exemple, mit 10 ans à établir à la main (et 10 ans à le vérifier: 1847-1867) une liste impressionnante de termes pour la Lune. La précision est telle que son calcul est utilisé aujourd'hui pour ... tester les gros systèmes informatiques (Cf "Pour la Science", n°52, 2/82).

Si on se contente d'une précision de l'ordre de 1° pour les angles, le problème est plus simple, mais on doit cependant tenir compte de l'orientation du plan orbital de la planète par rapport au plan écliptique (de l'orbite terrestre), c'est à dire indiquer d'autres éléments orbitaux: la longitude du périhélie (notée $\bar{\omega}$ fig.6), l'inclinaison du plan orbital sur l'écliptique, et la position des noeuds (intersection des deux plans). De plus,

il est nécessaire d'utiliser des relations de trigonométrie sphérique.

On se reportera à l'article des C.C. n° 24, déjà évoqué, pour trouver des valeurs numériques pour les planètes visibles à l'oeil nu et la Terre.

Le calcul complet de la position sur la sphère céleste fera l'objet d'un autre article, avec applications informatiques.

c). Rappelons la marche à suivre:

- Données :	$a \quad e \quad n \quad M_0 \quad (\bar{\omega})$
- Variable :	$t-t_1$
- Calculer successivement	
	M par $M = n.t + M_0$
	u par $u = M + e^0 . \sin u$
	v par $\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{u}{2}$
	r par $r = a.(1-e.\cos u)$

La longitude écliptique héliocentrique l , mesurée par rapport à l'équinoxe $S\bar{\delta}$ est donnée par $l = v + \bar{\omega}$ (si on néglige l'inclinaison du plan orbital sur l'écliptique).

d). Remarques aux quarts de tours.

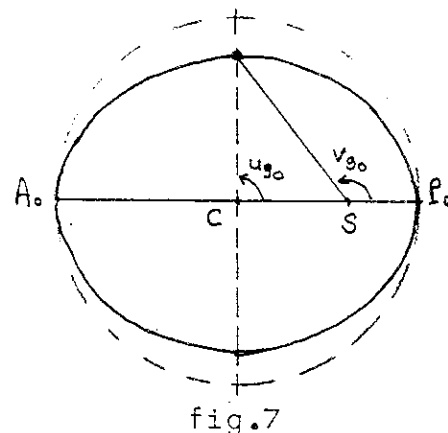
En partant du périhélie P_0 , les positions correspondant aux quarts de tours sont définies par $u = k.90^\circ$ avec k entier. Si k est pair, $u=0$ ou 180° (modulo 360°), et $M=u$ quelque soit e .

Donc la $1/2$ période correspond au $1/2$ parcours.

Mais si k est impair, ($k=1$ ou 3 par exemple), le $1/4$ de "tour" ne correspond plus au $1/4$ de période, comme le montre le tableau ci-après; calculons M_{90} correspondant à $u=90^\circ$: en écrivant (EK)

$90 = M_{90} + e.180/\pi . \sin 90$, d'où $M_{90} = 90.(1 - 2e/\pi)$. On calcule v_{90} de la même façon: $\operatorname{tg} \frac{v_{90}}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$

e	M_{90}	$\frac{M_{90}}{360}$	v_{90}
0	90°	0,250	90°
0,1	84,3	0,234	95,7
0,2	78,5	0,218	101,5
0,5	61,4	0,170	120
0,9	38,4	0,107	154,2
1	32,7	0,091	180



Et les saisons peuvent avoir des durées fort inégales. Prenons le cas d'une planète (hypothétique) de période 12 mois et dont l'excentricité orbitale serait $e=0,5$.

La planète est figurée ci-contre sur son orbite, chaque mois. Les noms équinoxe (Eq) et solstice (Sc) indiqués ici correspondent à une direction $S\delta$ supposée parallèle au grand-axe de l'ellipse. Et que penser des écarts de température tout au long de l'année...

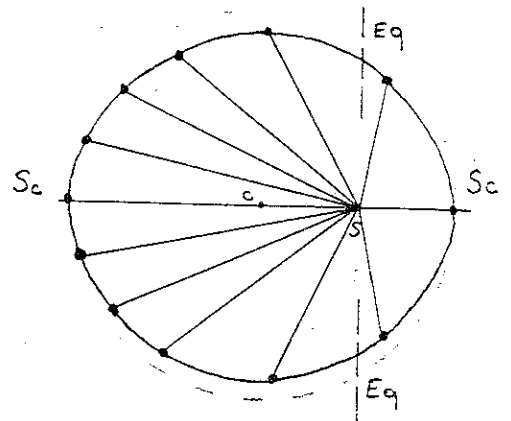


fig.7

Il serait intéressant de tracer cette ellipse sur papier millimétré et d'évaluer l'aire de chacun des 12 secteurs elliptiques, de sommet S.

Rappelons que le début d'une saison est défini par $l=k.90^\circ$ où k est un entier, et $l=v+\bar{\omega}$ la longitude héliocentrique de la planète. On a supposé fig.7 que $\bar{\omega}=0^\circ$. Il est facile de calculer les durées des saisons pour différentes valeurs de e .

e). D'autres exercices...

En utilisant une calculatrice programmable, le tracé de quelques graphiques n'est plus fastidieux. En voici deux à titre d'exemples:

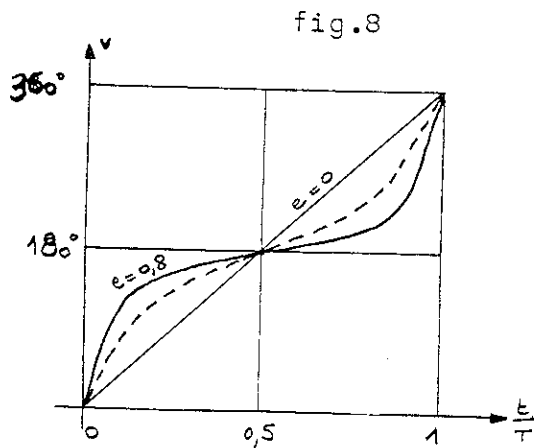


fig.8

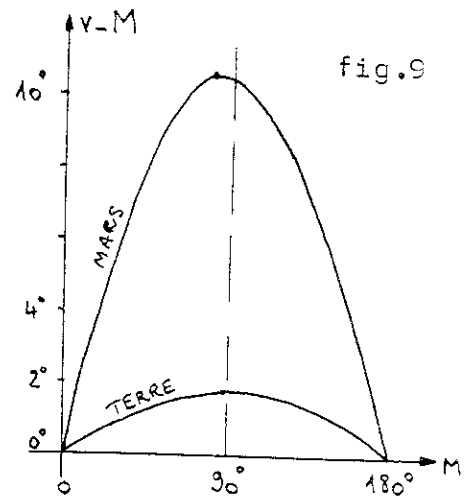


fig.9

$v=v(t/T)$ visualise la révolution non uniforme (fig.8)

$v-M=f(M)$ visualise les écarts avec une révolution uniforme, pour Mars ($e=0,0934$) et la Terre ($e=0,0167$) (fig.9), grâce aux travaux de KEPLER.

A vos calculatrices ...

Michel TOULMONDE (EN Etiolles 91)