L'Equation de KEPLER

1- Le problème de Kepler

Après avoir longuement cherché (8 ans) à comprendre le mouvement de la planète Mars, et l'avoir fait "prisonnier" (sic), Johannes KEPLER écrit, à la fin de son livre "Astronomia Nova", en 1609:

"J'exhorte les géomètres, afin qu'ils résolvent pour moi ce "problème: partager, dans un rapport donné, l'aire du demi-cercle "à partir d'un point quelconque du diamètre. Il me suffit de "croire que, à cause de l'hétérogénéité de l'arc et du sinus, "ce problème ne peut être résolu a priori.

"Quiconque aura montré le chemin (pour le faire) sera pour "moi un grand Apollonius."

Cf."Astronomia Nova", trad.J.Peyroux, Ed.Blanchard (p.384)
Cf."La Révolution astronomique", A.Koyré, Ed.Hermann(p.280)

Cet énoncé s'appelle "le problème de Kepler". L'équation qui le formule (presque) est dite "équation de Kepler". Celle-ci est fondamentale pour étudier un mouvement "keplerien". C'est dire son importance en mécanique céleste!..

De quoi s'agit-il ?

Grâce aux mesures des positions de Mars dues à Tycho-Brahé, précises à 1' près, Kepler est amené à abandonner les orbites circulaires d'Eudoxe, Aristote, Ptolémée, et Copernic, au profit des orbites elliptiques autour du Soleil.

C'est une "révolution"...

Mais le mouvement elliptique n'est pas simple à analyser (à son époque), et il a encore besoin du cercle.

Considérons donc (fig.1) un cercle de centre C et de rayon $CP_o = a$. La planète P (Mars) décrit une ellipse de même grand-axe autour du Soleil S.

Soit P' le point du cercle qui se projette en P sur l'ellipse perpendiculairement à A_oP_o.

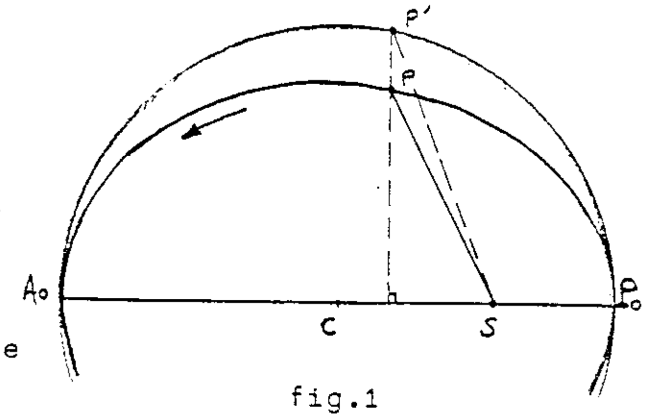

fig.1

Kepler cherche à évaluer l'aire (P_0SP), limitée par l'arc de l'ellipse, car il a établi que le mouvement de Mars s'effectue autour de S suivant la "loi des aires".

On peut calculer l'aire (P_0SP) si on sait calculer l'aire (P_0SP') Mais S est un point du diamètre, différent du centre C.

D'où le problème posé par Kepler.

L'étude de ce problème nous fournira les équations de base du mouvement keplerien, c'est à dire nous permettra de positionner la planète sur son orbite elliptique à un instant donné.

2- Rappels sur des propriétes de l'ellipse.

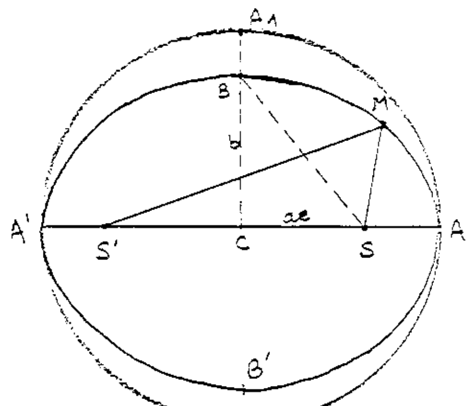

fig.2

Soit (fig.2) une ellipse de centre C et d'axes AA'=2a et BB'=2b. Le point S est un des foyers, et le rapport CS/CA est l'excentricité e. D'où CS=ae.

— L'ellipse est l'ensemble des points M tels que MS+MS'=Cste. Il est facile de voir que si M est en A:

$AS+AS'=(a-ae)+(a+ae)=2a=Cste$

L'ellipse est donc définie par les deux nombres a et e.

Dans le triangle BCS, on peut écrire: $BS^2= b^2+a^2e^2$. Or BS=a d'où: $b/a =\sqrt{1-e^2}$

— Propriété projective.

On démontre que l'ellipse est la projection du cercle sur un diamètre dans le rapport b/a constant. L'aire possède egalement cette propriété:

$$\begin{aligned} \text{Aire de l'ellipse} &= \text{Aire du cercle} \times b/a \\ &= \pi a^2 \times b/a \\ &= \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2} \end{aligned}$$

— Cercle et ellipse.

Si e=0, S est en C : l'ellipse est un cercle.

Si e=1, S est en A : l'ellipse est une parabole.

Donc pour l'ellipse: $0 \leqslant e < 1$

L'écart relatif du cercle à l'ellipse est $BA_1/CA_1=1-b/a$. Dans le cas de la Terre, e=0,016 ; l'écart est de 0,13mm pour un rayon de 1 m, donc contenu dans le trait de crayon...Pour Mars, e=0,093 et l'écart atteint 4mm pour 1m de rayon.

3- Calcul de l'aire cherchée.

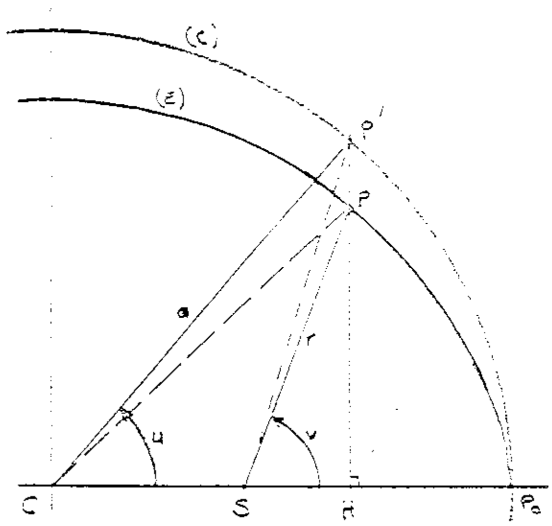

fig.3

a).Notations utilisées.(fig.3)

$a=CP_o$: demi grand-axe ($=CP'$)

e : excentricité ($ae=CS$)

$r=SP$: rayon-vecteur

$u=(\overrightarrow{CP_o},\overrightarrow{CP'})$: anomalie excentrique

$v=(\overrightarrow{SP_o},\overrightarrow{SP'})$: anomalie vraie

T : période de révolution (durée)

Le terme "anomalie" pour désigner les angles est dû à Ptolémée.

b). Problème de Kepler

Avec ces notations, on cherche à placer le point P' sur le cercle (donc l'angle u) tel que l'aire du secteur circulaire(P_oSP') soit une fraction donnée de l'aire du demi-cercle ($\frac{\pi}{2}a^2$).

c). Calcul des aires.

On écrira ici entre parenthèses les aires des triangles,curvilignes ou non.

- Secteur circulaire P_oCP'

$(P_oCP')=\frac{1}{2}.P_oC.\widehat{P_oP'} = a^2.u/2$ (u est en radians)

- Triangle CSP'

$(CSP') =\frac{1}{2}.CS.P'H$ Or $P'H=a.\sin u$

$=1/2.a^2e.\sin u$

- Secteur P_oSP' : par différence

$(P_oSP')=(P_oCP') - (CSP')$

$=1/2.a^2.(u-e.\sin u)$

- Secteur elliptique P_oSP

En utilisant la propriété projective dans le rapport b/a :

$(P_oSP) = (P_oSP') \times b/a$ et $b/a=\sqrt{1-e^2}$

$=1/2.a^2.\sqrt{1-e^2}.(u-e.\sin u)$

d). Loi des aires.

Kepler a montré empiriquement (cf."Astronomia Nova") que l'aire du secteur elliptique (P_oSP) est proportionnelle à la durée du parcours $\widehat{P_oP}$ de la planète sur son orbite.

Suivant cette loi des "aires", on peut écrire:

$(P_oSP) = S(t) = A.t+B$. Déterminons les coefficients A et B.

Soit t_o la date du passage au périhélie P_o. Donc $S(t_o)=0$

Après un tour complet (une révolution), l'aire est celle de l'ellipse entière; d'où $S(t_o+T)=\pi ab = \pi a^2.\sqrt{1-e^2}$

D'où finalement: $S(t)=\pi a^2\sqrt{1-e^2}.(\frac{t-t_o}{T})$

e). Equation de Kepler

En égalant les deux expressions de l'aire (P_oSP), on obtient:

$$1/2.a^2.\sqrt{1-e^2}.(u-e.\sin u) = a^2.\sqrt{1-e^2}.(\frac{t-to}{T})$$

ou, après simplification:

$$u-e.\sin u = \frac{2\pi}{T}.(t-to)$$

On pose $M=\frac{2\pi}{T}.(t-to)$. C'est l'anomalie moyenne, car elle fait intervenir la période de révolution T et croît proportionnellement au temps.

On obtient donc l'équation:

$$\boxed{u-e.\sin u = M} \quad (EK)$$

dite "équation de Kepler".

Le problème de Kepler consiste donc à déterminer l'angle u tel que (EK) soit vérifiée, avec e et M donnés ($0\leqslant e<1$ et $0\leqslant M\leqslant 2\pi$).

Comme u et sin u sont de "genres" différents, l'équation ne peut être résolue analytiquement (exactement).

4- Autre méthode pour établir (EK)

a). Force centrale

Newton a étudié le mouvement d'une planète de masse m sous l'action d'une force centrale d'attraction $\vec{F}=-K.m.\frac{\vec{r}}{r^3}$ (K 0).

L'énergie E de la planète est constante car cette planète ne subit aucune autre action que celle due au Soleil S. Cette énergie dépend des conditions initiales du mouvement (distance r_o et vitesse $\vec{V_o}$)

Le mouvement est plan, et tel que $\boxed{r^2.\frac{dv}{dt}=C}$ (Constante des aires).

On pose: $\begin{cases} p=C^2/K \quad \text{et} \\ e=\sqrt{1+\frac{2E}{m}.\frac{C^2}{K^2}} \end{cases}$

Si $V_o^2<2.K/r_o$, l'énergie E est négative et e<1. La trajectoire est alors une ellipse d'excentricité e. (On se reportera à un cours de Mécanique pour les détails).

Dans ce cas, l'équation polaire de la trajectoire r(v) est:

$$\boxed{r=\frac{p}{1+e.\cos v}} \quad \text{avec} \quad \boxed{p=a.(1-e^2)}$$

l'angle v étant nul à l'instant t=0

La vitesse aréolaire est $1/2.r^2.\frac{dv}{dt}$

C'est la vitesse de modification de l'aire hachurée (fig.4)

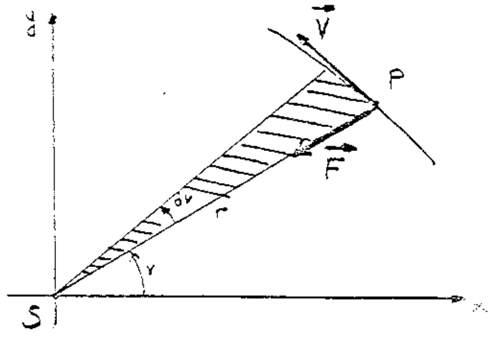

fig.4

b). Calcul de C

Voici deux méthodes permettant de déterminer la valeur de C .

1-Par l'aire de l'ellipse:

On intègre directement l'équation $r^2.dv = C.dt$

$$A=1/2.\int_0^{2\pi} r^2.dv = 1/2.\int_{t_0}^{t_0+T} C.dt$$

soit: $A=\pi ab = 1/2.C.T$ où T est la période de révolution.

d'où: $C = \dfrac{2\pi a^2.\sqrt{1-e^2}}{T}$

2-Par calcul d'intégration:

avec $r= \dfrac{a.(1-e^2)}{1+e.\cos v}$ et $r^2.dv = C.dt$

soit $a^2.(1-e^2)^2.\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dv}{(1+e.\cos v)^2} = C.\int_{t_0}^{t_0+T} dt$

Or $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dv}{(1+e.\cos v)^2} = \frac{\pi}{(1-e^2)^{3/2}}$ (poser $x=tg\frac{v}{2}$)

d'où la même valeur de C.: $\boxed{C = 2\pi/T.a^2.\sqrt{1-e^2}}$

c). Recherche de (EK).

1-On cherche d'abord à exprimer r et v en fonction de u seul.

D'après la fig.3 : $\begin{cases} r.\cos v = a.\cos u - ae & (1) \\ r.\sin v = a.\sin u .\sqrt{1-e^2} & (2) \end{cases}$

En élevant (1) et (2) au carré, et avec la condition $r \geqslant 0$:

$$\boxed{r = a.(1-e.\cos u)} \qquad (3)$$

Par rapport direct de (1) et (2) :

$$tg\ v=\frac{\sqrt{1-e^2}.\sin u}{\cos u - e}$$

Il est possible de trouver une "meilleure" relation v(u):

En effet:

(1) donne $r.(\cos^2 \frac{v}{2} - \sin^2 \frac{v}{2}) = a.(\cos u - e)$

(3) donne $r.(\cos^2 \frac{v}{2} + \sin^2 \frac{v}{2}) = a.(1-e.\cos u)$

En utilisant l'angle moitié u/2 ,et somme et différence de ces relations:

$$2r.\cos^2 \frac{v}{2} = 2a.(1-e).\cos^2 \frac{u}{2} \qquad (4)$$

$$2r.\sin^2 \frac{v}{2} = 2a.(1+e).\sin^2 \frac{u}{2} \qquad (5)$$

d'où finalement: $\boxed{tg \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} .tg \frac{u}{2}}$ (6)

Cette relation nous sera utile pour trouver v quand (EK) aura "sorti" u.

2-Calculons dv/du en différenciant la relation (6):

$$\frac{dv}{du}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\frac{\cos^2\frac{v}{2}}{\cos^2\frac{u}{2}}$$

Mais, d'après (4): $\frac{dv}{du}=\frac{a}{r}.\sqrt{1-e^2}$ et $=\frac{\sin v}{\sin u}$ d'après (2)

$$\text{d'où}\quad \frac{dv}{du}=\frac{\sin v}{\sin u}\qquad (7)$$

3-Cherchons finalement du/dt, avec la loi des aires:

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dt}=\frac{\sin u}{\sin v}\cdot\frac{C}{r^2}=\left(\frac{2\pi}{T}.\frac{a^2}{r^2}.\sqrt{1-e^2}\right).\left(\frac{r}{a.\sqrt{1-e^2}}\right)=\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{a}{r}$$

Or, d'après (3) : $\frac{a}{r}=\frac{1}{1-e.\cos u}$

On a finalement; en séparant les variables:

$$(1-e.\cos u).du = 2\pi/T.\ dt$$

que l'on intègre de t_0 à t (et de 0 à u):

$$\boxed{u-e.\sin u = 2\pi/T.(t-t_0) = M}$$

C'est (EK).

Cette recherche (un peu longue) nous a fourni deux relations importantes pour la suite:

$$\boxed{\begin{array}{ll} r = a.(1-e.\cos u) & (3)\\ \mathrm{tg}\,\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{u}{2} & (6)\end{array}}$$

d). Remarque

Il est important de noter que Kepler et Newton ont des démarches différentes. Kepler utilise uniquement des raisonnements géométriques concernant l'ellipse et "sa" loi empirique (et purement géométrique) des aires. Newton au contraire utilise une loi physique (qu'il a par ailleurs découverte !) et des raisonnements géométriques.

Kepler a ouvert la voie...

(... à suivre)

Michel TOULMONDE (EN d'Etiolles)

****

DES NOUVELLES DE PIONNIER 10

Le 13 juin dernier, la sonde américaine Pionnier 10 a atteint la distance de 30,3 u.a. du Soleil, devenant ainsi plus éloignée de lui que les 9 planètes du système solaire. A cette distance, tout signal électromagnétique met 4h 20 min pour atteindre la Terre. A la vitesse avec laquelle la sonde s'éloigne, ce retard augmente d'une minute tous les 4 jours.