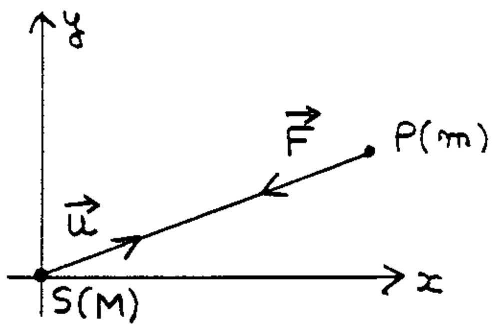
DE NEWTON A KEPLER ... AVEC UNE CALCULETTE

BUT: Il ne s'agit pas de renverser le cours de l'histoire, ni celui du temps ! On se propose simplement de retrouver graphiquement les lois de Kepler en partant de la loi d'attraction universelle (loi de Newton). Le jeu consiste à lancer une planète P de masse m située à la distance SP = r du Soleil dont la masse est M. Le lancement se fait avec une vitesse V. On ne tient compte que de l'attraction exercée par S sur P et on cherche l'orbite relative de P par rapport à S par une méthode de calcul numérique.

PRINCIPE: A l'instant t, P subit l'attraction de S donnée par:



$$\vec{F} = - \frac{G\,m\,M}{r^2}\,\vec{u}$$

Les composantes de $\vec{F}$ sont:

$$F_x = - G\,m\,M\,\frac{x}{r^3} = m\,\frac{dv_x}{dt}$$

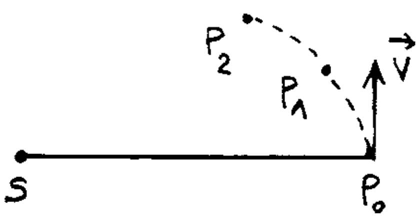
$$F_y = - G\,m\,M\,\frac{y}{r^3} = m\,\frac{dv_y}{dt}$$

avec $r^2 = x^2 + y^2$

ainsi $\frac{dv_x}{dt} = - G\,M\,\frac{x}{r^3}$ et $\frac{dv_y}{dt} = - G\,M\,\frac{y}{r^3}$

Par un choix d'unités, posons G M = 1; les composantes de l'accélération de P deviennent:

$$a_x = - \frac{x}{r^3} \quad ; \quad a_y = - \frac{y}{r^3}$$



On part de $P_o(x_o, y_o)$ à l'instant t = 0; la vitesse de lancement est $\vec{V}\,(v_{x_o}, v_{y_o})$; ainsi $r_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$

et $a_{x_o} = - \frac{x_o}{r_o^3}$; $a_{y_o} = - \frac{y_o}{r_o^3}$

On choisit un intervalle de temps, soit t, (le pas) ce qui permettra l'intégration numérique; celle-ci sera d'autant plus précise que le pas est plus petit.

$$\begin{cases} v_{x_1} = v_{x_o} + a_{x_o}\,\frac{t}{2} \\ v_{y_1} = v_{y_o} + a_{y_o}\,\frac{t}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_o + v_{x_1}\,t \\ y_1 = y_o + v_{y_1}\,t \end{cases}$$

Ainsi, on obtient une nouvelle position $P_1(x_1, y_1)$ et $\vec{V}_1(v_{x_1}, v_{y_1})$ et on recommence:

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad ; \quad a_{x_1} = - \frac{x_1}{r_1^3} \quad ; \quad a_{y_1} = - \frac{y_1}{r_1^3}$$

$$\begin{cases} v_{x_2} = v_{x_1} + a_{x_1}\,t \\ v_{y_2} = v_{y_1} + a_{y_1}\,t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 + v_{x_2}\,t \\ y_2 = y_1 + v_{y_2}\,t \end{cases}$$

ce qui représente la position $P_2(x_2 , y_2)$ et $\vec{V}_2(v_{x_2} , v_{y_2})$

et on continue...
Prenons un exemple numérique:
$x_o = 0,5 \quad y_o = 0 \quad v_{x_o} = 0 \quad v_{y_o} = 1,7 \quad t = 0,1$

on obtient successivement:

$r_o = 0,5 \quad a_{x_o} = - \dfrac{0,5}{(0,5)^3} = - 4 \quad a_{y_o} = 0$

$$\begin{cases} v_{x_1} = 0 - 4 \times 0,05 = - 0,2 \\ v_{y_1} = 1,7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0,5 - 0,2 \times 0,1 = 0,48 \\ y_1 = 0 + 1,7 \times 0,1 \end{cases}$$

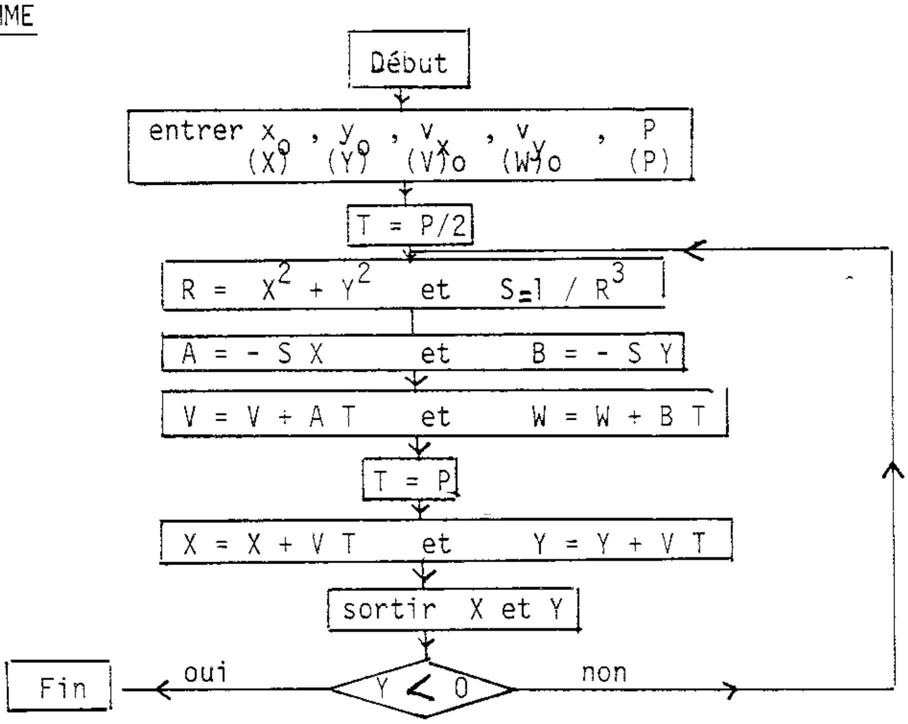
puis $r_1 = \sqrt{(0,48)^2 + (0,17)^2} = 0,509$

$a_{x_1} = - \dfrac{0,48}{(0,509)^3} = - 3,639 \quad a_{y_1} = - \dfrac{0,17}{(0,509)^3} = - 1,289$

$$\begin{cases} v_{x_2} = - 0,2 - 3,639 \times 0,1 = - 0,564 \\ v_{y_2} = 1,7 - 1,289 \times 0,1 = 1,571 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = 0,48 - 0,564 \times 0,1 = 0,423 \\ y_2 = 0,17 + 1,571 \times 0,1 = 0,327 \end{cases}$$

etc... (les valeurs successives de x et y figurent dans le tableau 1 donné ci-dessous)
On voit que la méthode est très simple, mais elle demande beaucoup de calculs numériques: la calculatrice programmable convient parfaitement car pour ce travail fastidieux on fait des boucles.

ORGANIGRAMME



La figure 1 a été faite avec les valeurs du tableau 1 après multiplication par 100 et report en mm. A mesure que les points sont mis en place, on constate que les arcs successifs parcourus en des durées égales (égales au pas) sont de plus en plus faibles: la planète ralentit à mesure qu'elle s'éloigne du Soleil; la loi des aires devient presque "tangible" !

Tableau 1

$x_0 = 0,5$; $y_0 = 0$; $v_{x_0} = 0$; $v_{y_0} = 1,7$

x	0,5	0,480	0,423	0,339	0,237	0,125	0,009	-0,106	-0,22	-0,33
y	0	0,170	0,327	0,462	0,574	0,661	0,727	0,774	0,804	0,821

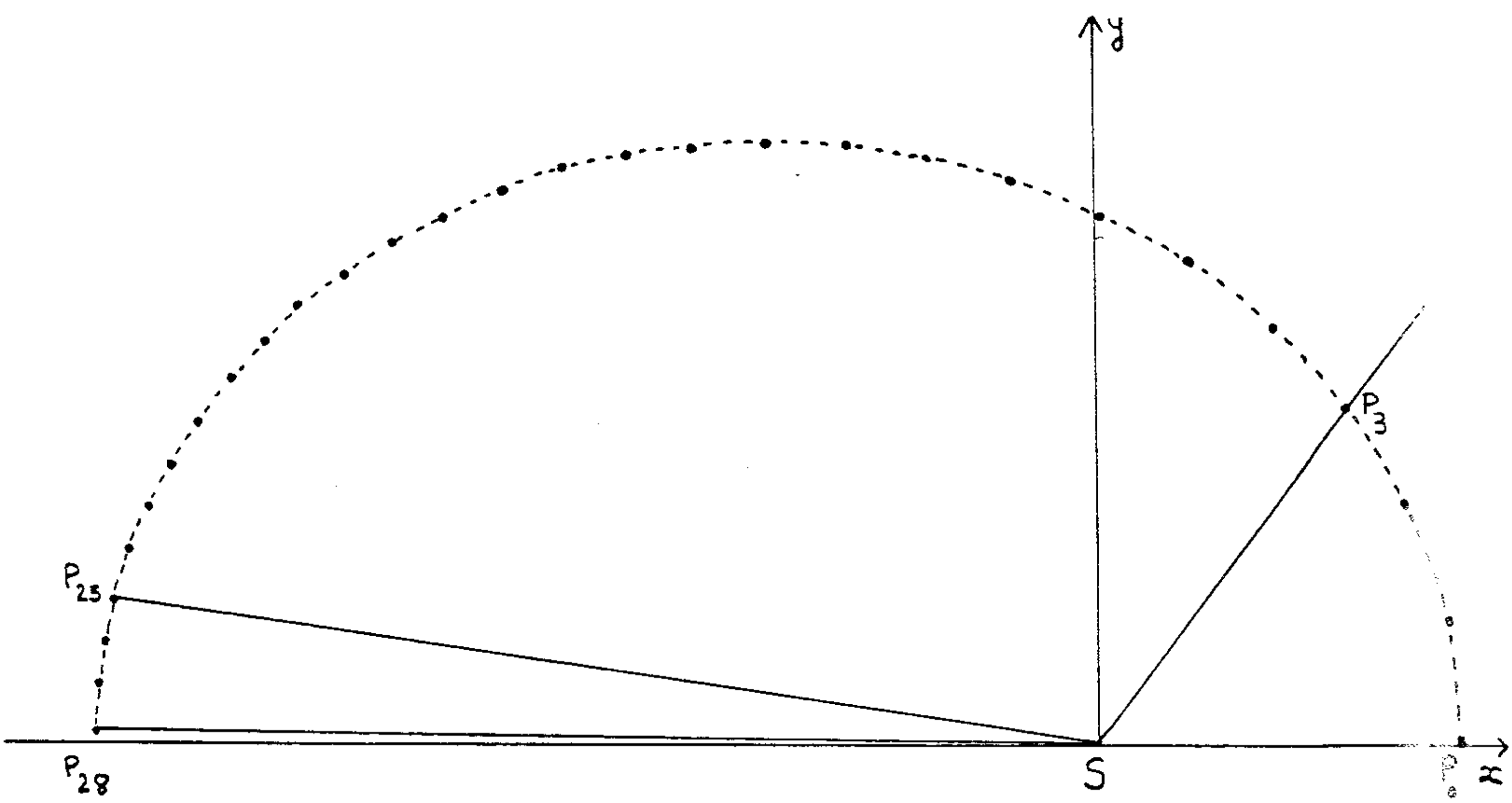
x	-0,435	-0,535	-0,630	-0,718	-0,801	-0,878	-0,948	-1,013	-1,072	-1,125
y	0,826	0,821	0,807	0,786	0,758	0,724	0,686	0,643	0,597	0,547

x	-1,173	-1,214	-1,251	-1,281	-1,306	-1,325	-1,339	-1,348	-1,351
y	0,495	0,440	0,383	0,325	0,265	0,203	0,142	0,079	0,016

Tableau 2

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y	0,83	0,825	0,810	0,785	0,748	0,698	0,631	0,542	0,416	0,191

Figure 1



VERIFICATION DES LOIS DE KEPLER

a) On trace sur papier millimétré transparent "l'ellipse théorique" d'équation

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec a et b déterminés sur la figure 1

ici $a = 0,925$ et $b = 0,83$

La superposition avec la trajectoire expérimentale est très suggestive: le recouvrement est presque parfait (le dessin est très beau !)

b) Loi des aires

Entre P_o et P_3 la surface balayée est environ:

$$\Delta S_1 = SP_o \times SP_3 \times \Theta \times \frac{\pi}{360}$$

$$= 50 \times 57,5 \times 54 \times \frac{\pi}{360} = 1354,8 \text{ mm}^2 \simeq 13,5 \text{ cm}^2$$

Entre P_{25} et P_{28} elle est:

$$\Delta S_2 = 135 \times 57,5 \times 54 \times \frac{\pi}{360} = 1341,8 \text{ mm}^2 \simeq 13,4 \text{ cm}^2$$

L'une et l'autre a été balayée en 3 pas (le balayage est régulier !)

c) Loi harmonique

La figure 1 montre que la demi ellipse expérimentale est parcourue en 28 pas environ soit $T/2 = 2,8$ (car le pas est 0,1). Ainsi, $T = 5,6$.

La troisième loi de Kepler donne: $T^2 / a^3 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$ ici $T^2 = 4\pi^2 a^3$

et $T = 2\pi a^{3/2} = 2\pi (0,925)^2 = 5,589$

On voit que l'accord avec la loi harmonique est presque parfait (la musique est belle!)

REMARQUES COMPLEMENTAIRES

- On peut tracer de nombreuses trajectoires différentes avec la même méthode en modifiant les conditions initiales (position du point de lancement et vitesse de lancement).

- Les collègues physiciens qui enseignent en 2de pourraient faire tracer les vecteurs vitesses en différents points de l'ellipse.

- Examiner le cas où $\vec{V}(0, \sqrt{2})$ et $\vec{V}(0, 2)$

si $\vec{V} \perp SP$ et $V = \sqrt{2}$, la trajectoire est un cercle

si $\sqrt{2} < V < 2$, la trajectoire est une ellipse de foyer S proche de P_o

si $V > 2$, la trajectoire est une hyperbole

si $V < \sqrt{2}$, la trajectoire est une ellipse de foyer S loin de P_o.

Jean-Paul ROSENSTIEHL

Lycée Montesquieu Le Mans