VERS L'EST OU VERS L'OUEST ?

Qu'on ne voit dans ce titre je ne sais quelle ambiguité... La réponse est toujours claire, mais varie selon les cas de figures, car notre bonne vieille Terre tourne, on le sait, paisiblement d'ouest en est.

Cette rotation se traduit par des effets de déviation (vers l'est ou vers l'ouest selon les conditions de lancement) lors de la chute des corps. On cite souvent à ce propos les expériences de chute effectuées par Reich (19ème siècle) dans un puits de mine (pour éviter les perturbations apportées par le vent). L'effet est minime : pour une hauteur de chute libre de l'ordre de 150 m, la déviation vers l'est reste inférieure à 3 cm sous nos latitudes. Cet effet est habituellement traité dans les cours post-baccalauréat, comme manifestation de la rotation terrestre par l'intermédiaire de la force d'inertie de Coriolis subie par les corps dans le référentiel terrestre. Sans être vraiment difficile, ce calcul est quelque peu formel et présente l'inconvenient, à mon sens, de masquer les explications physiques sous-jacentes. La déviation vers l'est n'est alors que le résultat d'un calcul.

Notre propos est de montrer qu'on peut analyser et faire comprendre le phénomène de manière simple et directe avec un minimum de formalisme du niveau d'élèves de Terminale. C'est aussi un très bon exemple apte à faire réfléchir ces mêmes élèves sur la notion de référentiel.

Rappelons d'abord que la Terre est approximativement une sphère de rayon $R = 6400$ km et qu'elle effectue un tour sur elle-même en une durée $T \approx 23$h 56 min = 86140 s, soit une vitesse angulaire de rotation $\omega = 2\pi/T \approx 7{,}3\ 10^{-5}$ rad.s^{-1}. Dans la suite, par seul souci de simplicité, nous nous placerons à l'équateur terrestre; c'est d'ailleurs là, que les effets de rotation sont maximaux, du moins en ce qui concerne notre problème. Aux pôles, au contraire, les effets sont inexistants, puisqu'en ces lieux privilégiés il n'y a ni est ni ouest... En outre nous négligerons les effets de la résistance de l'air et du vent et nous supposerons la durée Δt de chute très petite devant T.

I. ATTENTION AU REFERENTIEL !

Une idée fréquente, mais naturelle, dans l'esprit des elèves est que si on lache sans vitesse initiale un corps A à la hauteur h au-dessus du sol, à l'aplomb du point H du sol, son point de chute sera en B, le point H se trouvant alors à l'est de B du fait de la rotation de la Terre pendant la durée de la chute (Figure 1). On observerait ainsi une notable déviation vers l'ouest!

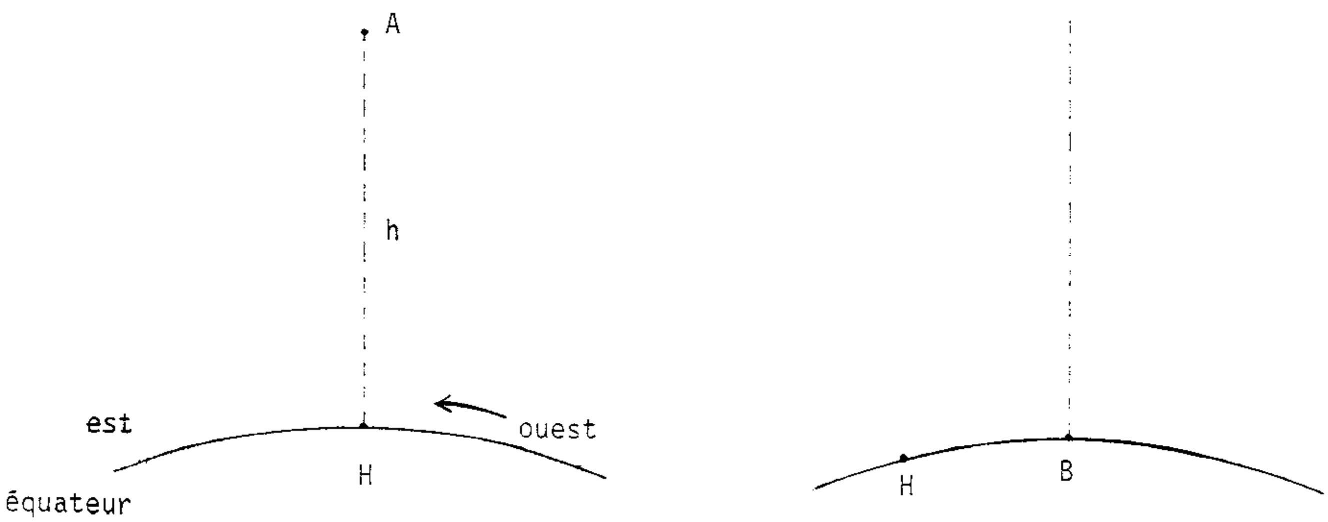

Figure 1

Prenons une durée de chute Δt de l'ordre de 5s ($h = \frac{1}{2}gt^2 \approx 120$ m); dans ce contexte on trouve : $HB = R\omega\Delta t = 6,4\ 10^6 \times 7,3\ 10^{-5} \times 5 \approx 2,3\ 10^3$ m soit 2,3 km, c'est-à-dire une impressionnante déviation vers l'ouest. L'erreur est naturellement typique de ce qu'il ne faut pas faire , et très propre à faire réfléchir des élèves : on raisonne à la fois dans deux référentiels différents. Le mouvement de la Terre est repéré par rapport à un référentiel galiléen (le référentiel de Copernic par exemple) alors que le mouvement de chute du corps est repéré (sans le dire) par rapport au référentiel terrestre . Il est plus simple, bien que moins naturel, de raisonner dans le référentiel de Copernic (R_c). Mais alors,il faut tenir compte de la vitesse d'entraînement du corps, car à l'instant où on le lache il est effectivement entraîné vers l'est par la rotation de la Terre. La bonne situation est représentée sur la figure 2. Cette vitesse d'entraînement vers l'est a pour module : $v = (R+h)\,\omega$.

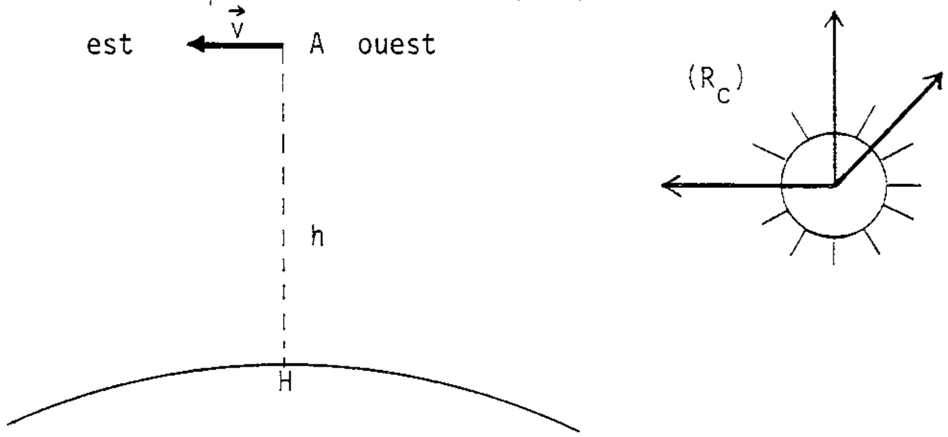

Figure 2

Il faudrait aussi tenir compte de la vitesse d'entraînement due au mouvement translationnel de la Terre autour du Soleil. Cette vitesse, la même pour tous les points, n'intervient pas dans la question qui nous occupe.

II. DEVIATION VERS L'EST.

Tenons donc compte de cette vitesse d'entraînement v. Supposons l'intensité de la pesanteur $\vec{g}$ uniforme (figure 3). On est ainsi ramené dans le référentiel de Copernic (R_c), au mouvement classique de la chute parabolique.(Dans (R_c) la relation $\vec{F} = m\,\vec{a}$ s'applique). Le point de chute B est tel que :

$$OB = (R+h)\omega\,\Delta t$$

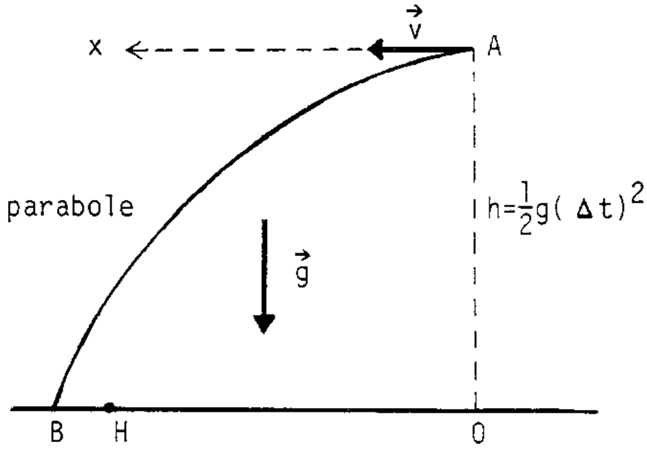

Figure 3

alors que le point H (qui était à l'aplomb de A à l'instant initial de chute) est tel que :

$$OH = R\,\omega\,\Delta t$$

Le point B se trouve donc, dans ces conditions, effectivement à l'est de H et la déviation vers l'est a pour valeur:

$HB = h\,\omega\,\Delta t$ avec $h = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$ d'où :

$$HB = \tfrac{1}{2}\, g\, \omega\, (\Delta t)^3$$

Remarque : l'hypothèse $\Delta t \ll T$ fait que l'on peut négliger la courbure des arcs tels que $\widehat{OB}$ ou $\widehat{OH}$ pour le calcul de la hauteur de chute.

Cette expression,obtenue très simplement, donne le bon ordre de grandeur du phénomène . Pour $\Delta t = 5s$:

$$HB = \frac{1}{2} \times 9{,}8 \times 7{,}3\ 10^{-5} \times 125 \approx 4{,}5\ 10^{-2}\ m,$$ la hauteur de chute h étant de l'ordre de 120 m.

Poussons plus loin l'analyse. Le calcul exact donne en fait :

$$HB = \frac{1}{3}\, g\, \omega\, (\Delta t)^3$$

soit seulement les 2/3 de la valeur que nous avons obtenue. A quoi attribuer cette discordance ? Nous avons supposé dans notre calcul $\vec{g}$ uniforme. Or $OH \approx OB \approx 2$ km : sur une distance de cet ordre, il faut tenir compte de l'obliquité de $\vec{g}$, la Terre étant sphérique (Figure 4). La composante g_x de $\vec{g}$ sur Ox a un

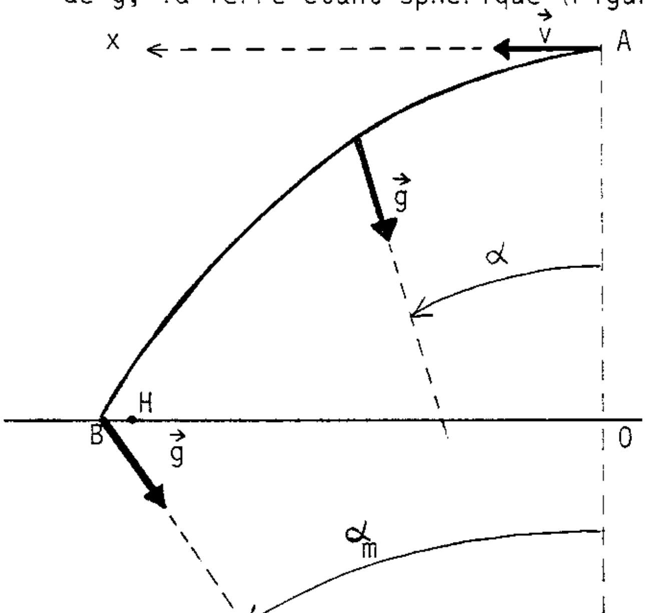

Figure4

effet décélérateur sur le mouvement horizontal, ce qui explique pourquoi la déviation observée est plus faible. Montrons que cette décélération est insuffisante pour ramener la déviation vers l'ouest. La composante g_x est maximale en valeur absolue au point de chute B là où l'angle α de $\vec{g}$ avec OA est maximal. En B :

$$g_{x_m} = -g\ \alpha_m = -\ g\omega\ \Delta t \quad (\alpha_m \approx \omega \Delta t).$$

Considérons alors un mouvement fictif sur Ox, de vitesse initiale $(R+h)\omega$ et uniformément retardé d'accélération $g_{x_m} = -g\omega\,\Delta t$. Pour un tel mouvement on aurait :

$$OB = (R+h)\omega\,\Delta t + \frac{1}{2}\, g_{x_m}\, (\Delta t)^2$$ avec $h = \frac{1}{2}\, g\, (\Delta t)^2$, d'où :

$$HB = (R+h)\omega\,\Delta t - \frac{1}{2} g\omega(\Delta t)^3 - R\omega\,\Delta t = h\omega\Delta t - \frac{1}{2}\, g\omega(\Delta t)^3 = 0$$

Dans cette situation fictive le point de chute serait donc en H (absence de déviation vers l'est ou vers l'ouest). Dans le mouvement réel $|g_x| < |g_{x_m}|$; la décélération est plus faible que dans ce mouvement fictif d'où nécessairement une déviation vers l'est.

L'obliquité de $\vec{g}$ a donc en définitive un effet de déviation vers l'ouest égal à :

$$\frac{1}{2}\, g\omega(\Delta t)^3 - \frac{1}{3}\, g\omega(\Delta t)^3 = \frac{1}{6}\, g\omega(\Delta t)^3$$

Ce résultat est très général (nous donnons le calcul exact, très simple, dans la note1 en appendice). Il ne fait pas intervenir les conditions initiales de lancement du corps, mais uniquement la durée Δt du mouvement. Notons que dans l'exemple considéré, l'effet d'obliquité de $\vec{g}$ est du même ordre de grandeur que l'effet dû à la vitesse initiale d'entraînement.

III. L'EXPERIENCE DE MERSENNE.

Cette expérience fut tentée au XVIIème siècle par le père Mersenne et par Petit, Intendant des fortifications. Il s'agissait de lancer un boulet "à la verticale" (!) et d'observer le point de chute. Mersenne pensait semble-t-il, que le boulet devait retomber sur le canon. Descartes avait prévu, quant à lui, que le boulet ne devait pas retomber ... Le boulet ne fut effectivement pas retrouvé. Nous laissons le lecteur juge d'une explication vraiment cartésienne...

L'OBUS TIRÉ VERTICALEMENT RETOMBERA-T-IL? Gravure du XVIIe siècle.

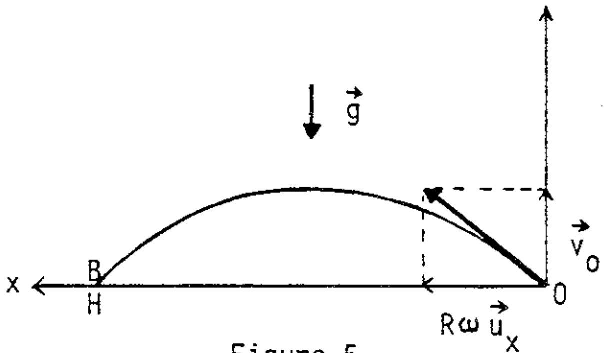

Figure 5

La figure 5 présente le mouvement dans le référentiel (R_c) en supposant $\vec{g}$ uniforme; $\vec{v}_0$ représente la vitesse verticale de lancement du boulet. Le mouvement est parabolique. La vitesse d'entraînement en 0 est $v = R\omega$, de sorte que :

$$OB = R\omega\,\Delta t = OH$$

où Δt est la durée du mouvement. Si l'on suppose $\vec{g}$ uniforme, le point de chute B est donc confondu avec H : le boulet retombe sur le canon ce qui semble donner raison à Mersenne.

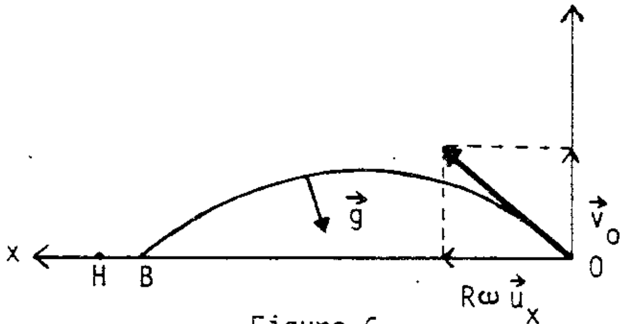

Figure 6

En fait, nous devons tenir compte de l'obliquité de $\vec{g}$ (Figure 6) qui entraîne, par effet décélérateur, une déviation vers l'ouest de valeur :

$$\frac{1}{6} g\,\omega\,(\Delta t)^3$$

(nous nous plaçons toujours, pour simplifier, à l'équateur). En définitive, le boulet aurait dû retomber à l'ouest du canon. Mais il était sans doute peu réaliste de supposer le lancement rigoureusement vertical et de négliger la vitesse du vent!

Si on prend par exemple , $v_0 = 250 m.s^{-1}$:

$$\Delta t = 2v_0/g \approx 50 \text{ s et } HB = \frac{1}{6} g\omega(\Delta t)^3 = \frac{1}{6} \times 9,8 \times 7,3\ 10^{-5} \times (50)^3 \approx 15 \text{ m(vers l'ouest)}$$

Pour conclure nous proposons le petit exercice suivant : on lance verticalement vers le haut, à la hauteur h au-dessus du sol, un corps avec une vitesse v_0; comment choisir v_0 pour que le corps retombe à l'ouest de la verticale du point de lancement (on néglige l'influence de l'air et du vent).

<u>Réponse</u> : $v_0 > (2gh/3)^{\frac{1}{2}}$

NOTES

I. L'effet d'obliquité de $\vec{g}$ se calcule aisément. Repérant l'instant de lancement par la date $t = 0$, à la date t la composante g_x a pour valeur :

$$g_x = -\, g\alpha \quad \text{avec } \alpha \approx \omega t \text{ , soit : } g_x = -\, g\,\omega\, t$$

On en déduit : $$v_x = v - \frac{1}{2} g\,\omega\, t^2 \qquad \text{(v: vitesse initiale d'entraînement)}$$

$$\text{et} \quad x = vt - \frac{1}{6} g \quad t^3$$

et pour la durée Δt de la chute :

$$OB = v\,\Delta t - \frac{1}{6} g\omega (\Delta t)^3$$

II. En un lieu de latitude λ, il suffit de multiplier tous les résultats par $\cos\lambda$. Cela tient à ce que les vitesses d'entraînement sont multipliées par $\cos\lambda$. Il est facile de voir, par exemple, qu'un point du sol est animé par rapport à (R_c) de la vitesse $R\omega\cos\lambda$, puisqu'il décrit une circonférence de rayon $R \cos\lambda$.