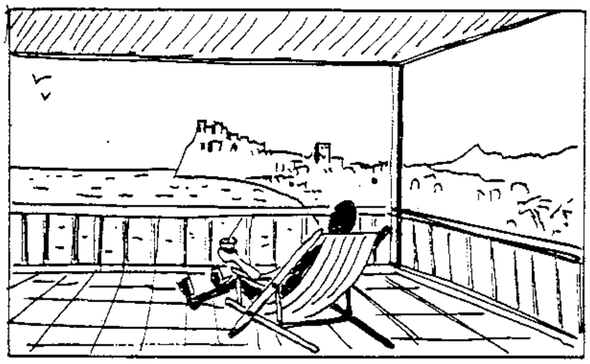
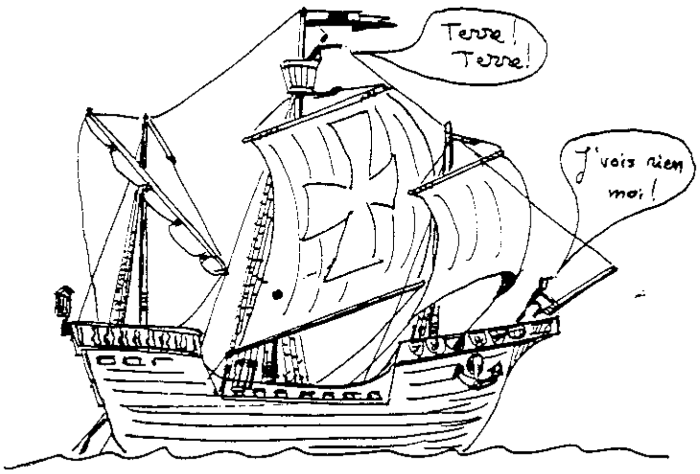
COMMENT MESURER LE RAYON DE LA TERRE
pendant ses vacances....

(G. Paturel, Observatoire de Lyon)

Voici la baie de Peñiscola en Espagne. L'observation attentive de ce cadre enchanteur va nous permettre de déterminer le rayon de la Terre, sans nous obliger à quitter notre chaise longue.
Comment ?
C'est ce que nous allons expliquer.



Plus on est haut, plus loin porte le regard. La démonstration évidente de cette affirmation est donnée dans le dessin ci-dessous.



Nous allons d'abord déduire la relation qui lie le rayon de la Terre, la hauteur du point d'observation et la distance de l'horizon.

Nous ferons des approximations mais pour des hauteurs H faibles le résultat sera correct.

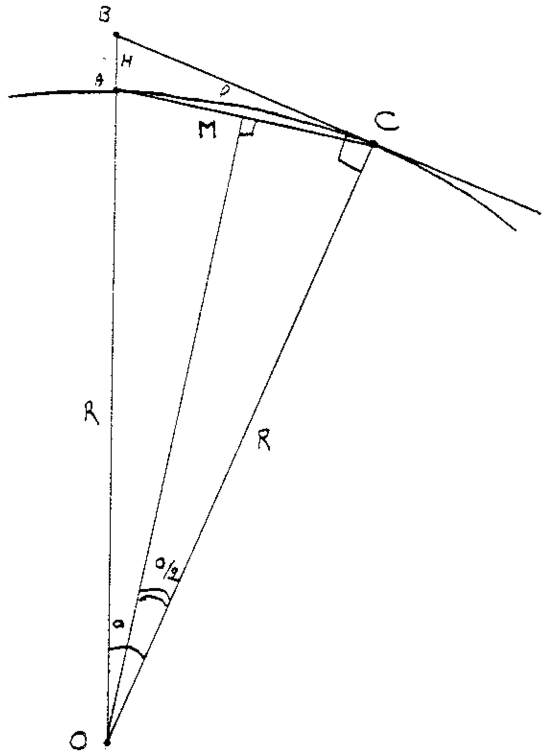
Pour celà représentons le triangle OBC, où O est le centre de la Terre, B la position de l'observateur dans sa chaise longue et C le point de l'horizon vu par cet observateur. Par définition l'angle BCO est un angle droit. Le point A de la figure représente le niveau de la mer à l'endroit où se trouve notre observateur. AB est donc la hauteur de l'observateur au-dessus du niveau de la mer. AO=OC est le rayon de la Terre. Le triangle AOC est un triangle isocèle. Pour la commodité nous adopterons les notations suivantes:

$AO=OC=R \qquad AC=\ell \qquad AB=H \qquad AOC=a$

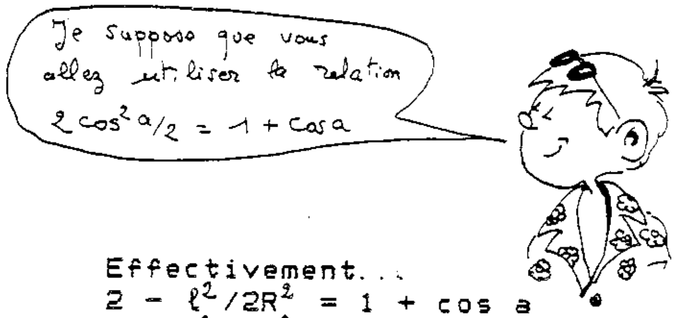
Dans tout ce qui suit nous supposerons que la longueur de l'arc AC est égale à la longueur de la corde AC.

Enfin pour le calcul nous aurons besoin du point M, milieu de AC, qui partage le triangle isocèle AOC en deux triangles rectangles dont un angle vaut a/2.

Commencons les calculs...



Dans le triangle OBC nous pouvons écrire:
$\cos a = OC/OB = R/(H+R)$
De même dans le triangle rectangle OMC nous avons:
$\cos a/2 = OM/R$
que nous transformons en:
$\cos^2 a/2 = OM^2/R^2$
Comme depuis Pythagore nous savons tous que $OM^2+CM^2 = OC^2$, nous obtenons $OM^2 = R^2 - \ell^2/4$, ce qui nous conduit à:
$\cos^2 a/2 = 1 - \ell^2/4R^2$



Effectivement...
$2 - \ell^2/2R^2 = 1 + \cos a$
$1 - \ell^2/2R^2 = \cos a$
$(2R^2 - \ell^2) = \cos a \,.\, 2R^2$
$= 2R^3/(H+R)$

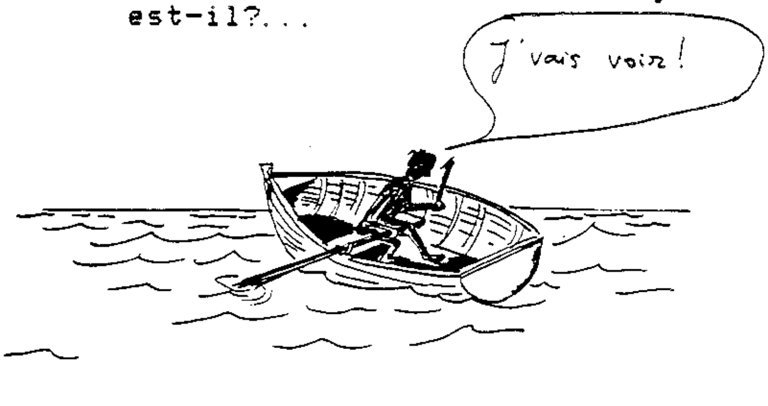
Finalement en développant nous aboutissons à:
$2R^3 = (H+R)(2R^2 - \ell^2)$
$= 2HR^2 - H\ell^2 + 2R^3 - R\ell^2$
Ce qui se simplifie en:
$2HR^2 = H\ell^2 + R\ell^2$
$2HR^2 = (H+R)\ell^2$

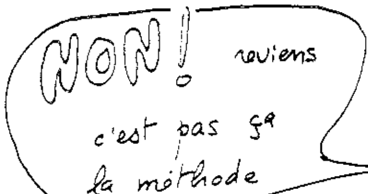
Or de ce côté de l'atlantique on peut encore considérer que la hauteur d'un immeuble est petite devant le rayon de la Terre. Nous remplacerons donc H+R par R. On arrive alors à la formule simple, à savoir par coeur:

$$\boxed{R = \ell^2/2H}$$

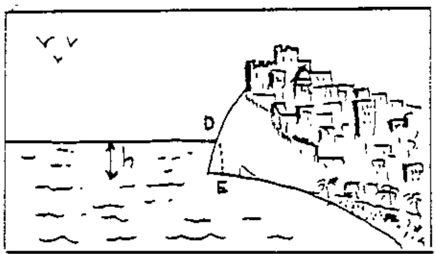
Si j'arrive à savoir maintenant que l'horizon que je vois depuis la hauteur H est à la distance ℓ, je peux alors en déduire facilement le rayon de la Terre.

Depuis notre Terrasse de vacances située à une hauteur H au-dessus du niveau de la mer nous voyons l'horizon. A quelle distance est-il?...



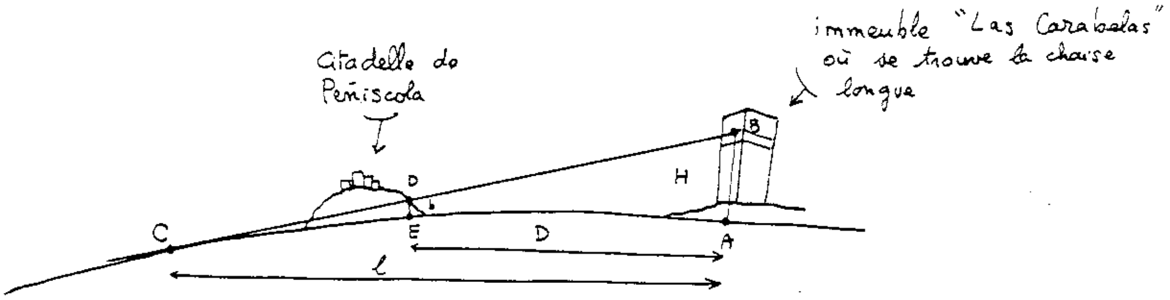


Faisons un agrandissement de la partie centrale de notre cadre enchanteur du début. Le pied de la falaise (point E), sous la citadelle de Peñiscola que nous apercevons au loin, se trouve par définition au niveau de la mer. Ce point apparait au-dessous de la ligne d'horizon car il est plus près de nous que ne l'est l'horizon.



La mesure de h=DE va nous renseigner sur la distance de l'horizon que nous cherchons à obtenir.

Représentons notre observateur regardant depuis sa terrasse en direction de la citadelle.



Nous appellerons D la distance AE entre l'immeuble de notre observateur et la citadelle de Peñiscola. Nous pouvons refaire le même calcul que précédemment mais appliqué cette fois-ci au point situé à une hauteur h au-dessus de la mer et dont la distance au point horizon C est (ℓ-D) au lieu de ℓ. Nous appliquons alors la relation établie à grand peine tout à l'heure et nous obtenons:

$$\boxed{R = (\ell - D)^2 / 2h}$$

Nous allons faire disparaître l entre nos deux relations précédentes:

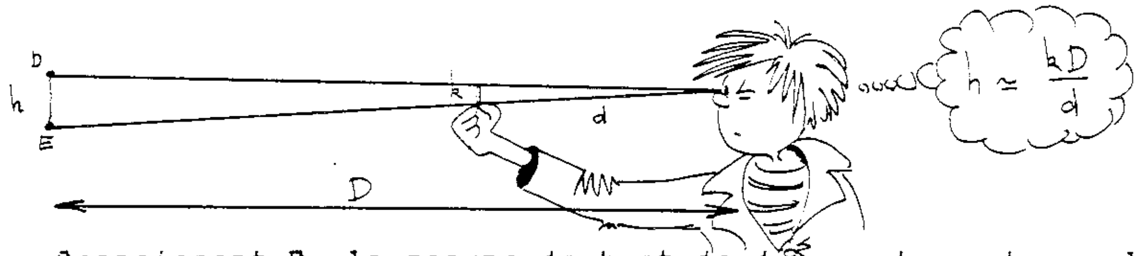
En faisant le rapport de nos deux relations nous avons :
$h/H = (1 - D/\ell)^2$
d'où
$\ell = D/(1 - \sqrt{h/H})$

En reportant dans la première relation nous obtenons:
$R = D^2/(\sqrt{2H} - \sqrt{2h})^2$

$$\boxed{R = D^2/(\sqrt{2H} - \sqrt{2h})^2}$$

Passons maintenant à l'application pratique de notre belle relation finale.

Il n'est pas question d'envoyer son fils, ni même sa femme pour mesurer h directement sur la falaise... Il ya un autre moyen dont le principe est contenu dans la méthode simple du dessinateur:

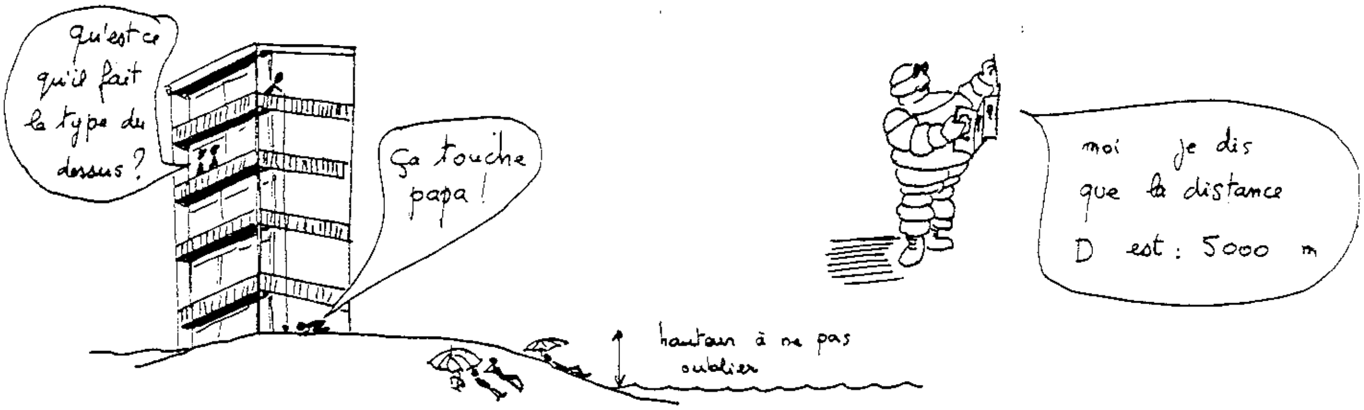


Connaissant D, la mesure de k et de d nous donne h par la formule approchée suivante:

h = kD/d

qui est correcte quand D est beaucoup plus grand que le bras de l'observateur n'est long (ce qui est verifié dans de nombreux cas).

En conclusion il ne reste à mesurer que la hauteur de l'immeuble et la distance D entre l'immeuble et la Citadelle de Peñiscola.



Les mesures effectuées au mois d'âout ont donné:

D = 5000 mètres
H = 11,48 mètres
k = 0,0043 mètres
d = 4,62 mètres (n'en concluez pas forcément que l'auteur a le bras long)

Ce qui conduit aux resultats suivants:

h = 4,65 mètres
et
R = 8250 kilomètres

Ce résultat peut paraître un peu décevant, mais si l'on songe qu'il est obtenu avec une base de mesure de 5 kilomètres seulement et que de plus, les mesures ont été faites avec pour instruments une carte routière, un double decimètre et un peloton de ficelle on peut s'estimer heureux (phénomène dangereux d'autosatisfaction).